МГТУ им. Н.Э.Баумана
Олимпиада школьников «Шаг в будущее»
10 класс, 1 тур 2014-2015 учебного года.

1. Какое из чисел больше $2^{5^{4^{3}}}$ или $3^{4^{2^{5}}}$?

2. Найти множество значений параметра a, при которых дискриминант уравнения $ax^2+2x+1=0$ в 9 раз больше квадрата разности двух его различных корней.

3. Даны отрезки a, b, c. Постройте отрезок длины $\dfrac{ab}{c\sqrt{5}}$ с помощью циркуля и линейки.

4. Докажите, что если для неотрицательных чисел x, y, z выполняется условие $x+y+z=2015$, то $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}<1009$.

5. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность диаметра 17. Диагонали AC и BD перпендикулярны. Найдите стороны AB, BC, CD, если известно, что $AD=8$ и $AB:CD=3:4$.

6. Найдите площадь многоугольника, ограниченного на координатной плоскости осью абсцисс и графиком функции $y=\left|\left|\ldots\left|\left|\left|x\right|-1\right|-2\right|-3\right|\ldots\right|-99\right|-100$.

Решение заданий заочного тура 10 класс.

Задача 1. Какое из чисел больше $2^{5^{4^3}}$ или $3^{4^{2^5}}$?

Решение:

$$2^{5^{4^3}} \vee 3^{4^{2^5}} \Leftrightarrow 2^{5^{64}} \vee 3^{4^{32}} \Leftrightarrow 2^{5^{64}} > 2^{4^{64}} = 2^{4^{63}\cdot 4} = (2^4)^{4^{63}} = 16^{4^{63}} > 3^{4^{63}} > 3^{4^{32}}$$

Ответ: $2^{5^{4^3}} > 3^{4^{2^5}}$

Задача 2. Найти множество значений параметра a, при которых дискриминант уравнения $ax^2 + 2x + 1 = 0$ в 9 раз больше квадрата разности двух его различных корней.

Решение. $D = 4 - 4a$.

$$\left(x_1 - x_2\right)^2 = \left(x_1 + x_2\right)^2 - 4x_1x_2 = \left(\frac{2}{a}\right)^2 - 4\cdot\frac{1}{a} = \frac{4-4a}{a^2} = \frac{D}{a^2}.$$

Получаем уравнение: $\frac{D}{a^2}\cdot 9 = D$. Условию $D > 0$ удовлетворяет только корень $a = -3$.

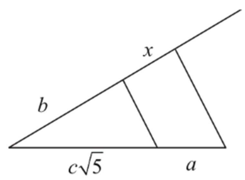
Ответ: $a \in \{-3\}$.

Задача 3. Даны отрезки a, b, c. Постройте отрезок длины $\frac{ab}{c\sqrt{5}}$ с помощью циркуля и линейки.

Решение.

1) Отрезок длины $c\sqrt{5}$ строится как гипотенуза прямоугольного треугольника с катетами c и $2c$.

2) Отрезок длины $x = \frac{ab}{c\sqrt{5}}$ строится по теореме Фалеса как пропорциональный отрезок, отсекаемый на сторонах угла параллельными прямыми из соотношения $\frac{x}{b} = \frac{a}{c\sqrt{5}}$.



Задача 4.

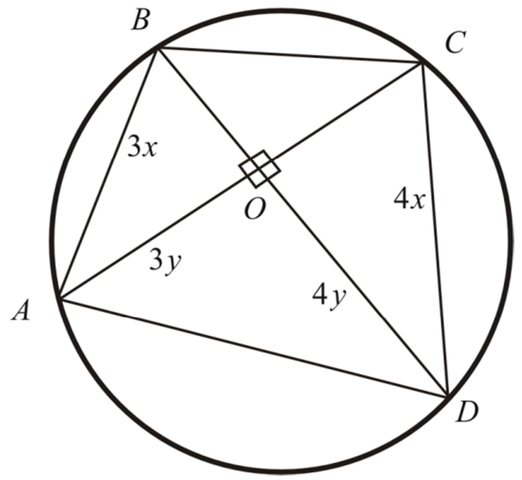
Докажите, что если для неотрицательных чисел x, y, z выполняется условие $x + y + z = 2015$, то $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} < 1009$.

Доказательство. Так как для неотрицательных чисел x, y, z выполняется условие $x + y + z = 2015$, то они одновременно не равны 1. Тогда по неравенству Коши выполняются строгие неравенства $\frac{x+1}{2}>\sqrt{x}$, $\frac{y+1}{2}>\sqrt{y}$, $\frac{z+1}{2}>\sqrt{z}$. Сложив эти неравенства, получим $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}<\frac{x+y+z+3}{2}=\frac{2015+3}{2}=1009.$

Задача 5.

Четырехугольник *ABCD* вписан в окружность диаметра 17. Диагонали *AC* и *BD* перпендикулярны. Найдите стороны *AB*, *BC*, *CD*, если известно, что $AD=8$ и $AB:CD=3:4$.

Решение. Треугольники *AOB* и *COD* подобны по двум углам (*AOB*, *COD* – вертикальные, *ABD*, *ACD* – опираются на одну дугу), следовательно, *AO*:*OD*=*AB*:*CD*=3:4.



Пусть $AO=3y$, $OD=4y$, тогда, по теореме Пифагора для прямоугольного треугольника *AOD* имеем $9y^2+16y^2=AD^2=64$, откуда $y=1{,}6$, $AO=4{,}8$, $OD=6{,}4$, $\sin\angle ODA=\frac{AO}{AD}=0{,}6$.

Пусть *AB*=3*x*, *CD*=4*x*. По теореме синусов для треугольника *ABD* имеем $\frac{AB}{\sin\angle BDA}=2R$, то есть $\frac{3x}{0{,}6}=17$, $x=3{,}4$, $AB=10{,}2$, $CD=13{,}6$.

По теореме Пифагора для прямоугольных треугольников *AOB*, *COD* и *BOC* находим $BO=9$, $CO=12$, $BC=15$.

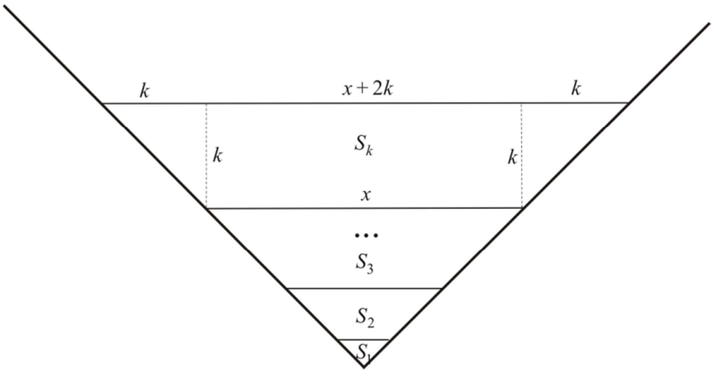
Ответ: $AB=10{,}2$, $CD=13{,}6$, $BC=15$.

Задача 6.

Найдите площадь многоугольника, ограниченного на координатной плоскости осью абсцисс и графиком функции $y=\left|\left|\ldots\left|\left|\left|x\right|-1\right|-2\right|-3\right|\ldots\right|-99\right|-100$.

Решение. Рассмотрим график функции $y=|x|$. Разделим его горизонтальными прямыми на слои шириной 1, 2, …100, начиная от вершины. Обозначим площади слоев S_1, $S_2,\ldots,S_{100}$, соответственно.

Тогда, площадь многоугольника, ограниченного на координатной плоскости осью абсцисс и графиком функции $y=\left|\left|\ldots\left|\left|\left|x\right|-1\right|-2\right|-3\right|\ldots\right|-99\right|-100$, в силу соответствующих отражений и сдвигов графика $y=|x|$, будет равна $S=S_{100}-S_{99}+S_{98}-S_{97}+\ldots+S_2-S_1$.



Докажем, по индукции, что площадь каждого слоя равна $S_n = n^3$. При $n=1$ имеем $S_1 = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 1 = 1^3$. Пусть верно, что $S_k = \left(\frac{x+x+2k}{2}\right)k = k^3$, где x – длина меньшего основания трапеции. Из этого равенства имеем, что $x = k^2 - k$.

Докажем, что $S_{k+1} = (k+1)^3$. Действительно,

$$S_{k+1} = \left(\frac{x+2k+x+2k+2(k+1)}{2}\right)(k+1) = \left(x+3k+1\right)(k+1) = \left(k^2+2k+1\right)(k+1) = (k+1)^3.$$

Таким образом,

$$S = S_{100} - S_{99} + S_{98} - S_{97} + ... + S_2 - S_1 = \left(100^3 - 99^3\right) + \left(98^3 - 97^3\right) + ... + \left(2^3 - 1^3\right).$$

Так как $(n+1)^3 - n^3 = 3n^2 + 3n + 1$, то

$$S = (3\cdot 99^2 + 3\cdot 99 + 1) + (3\cdot 97^2 + 3\cdot 97 + 1) + ... + (3\cdot 1^3 + 3\cdot 1 + 1) = 3(99^2 + 97^2 + ... + 1^2) +$$
$$+3(99 + 97 + ... + 1) + 50.$$

Сумма квадратов нечетных чисел от 1 до 99 равна

$$1^2 + 3^2 + ... + (2n-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3} = \frac{50\cdot 101\cdot 99}{3}.$$

Сумма нечетных чисел от 1 до 99 равна $1 + 3 + ... + (2n-1) = (2n-1)^2 = 7500$.

Таким образом, $S = 50\cdot 101\cdot 99 + 7500 + 50 = 507500$.

Ответ: 507500.

Критерии проверки заданий 10-го класса

задание	1	2	3	4	5	6
баллы	15	15	15	15	20	20

Всего 100 баллов

Задача 1.

Баллы	
15	Обоснованно получен правильный ответ.
12	При правильном понимании условия задачи и правильном ответе, есть замечания к четкости изложения обоснования.
0	Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям.

Задача 2.

Баллы	
15	Обоснованно получен правильный ответ.
10	Решение содержит арифметическую ошибку.
5	Не учтен знак дискриминанта.
0	Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям.

Задача 3.

Баллы	
15	Обоснованное и грамотно выполненное решение задачи.
12	При правильном ходе построения есть замечания к четкости его изложения и обоснования.
5	Верно построен только отрезок $c\sqrt{5}$.
0	Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям.

Задача 4.

Баллы	
15	Обоснованное и грамотно выполненное решение задачи.
12	При доказательстве по неравенству Коши нет обоснования строгости неравенства.
0	Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям.

Задача 5.

Баллы	
20	Обоснованное и грамотно выполненное решение задачи.
12	При верном и обоснованном ходе решения имеется арифметическая ошибка или решение недостаточно обосновано.
5	Верно начато решение задачи, получены некоторые промежуточные значения, дальнейшее решение неверно или отсутствует.
0	Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям.

Задача 6.

Баллы	
20	Обоснованное и грамотно выполненное решение задачи.
17	Решение содержит арифметическую ошибку в конце решения или решение недостаточно обосновано.
10	Площадь исходного многоугольника верно представлена как сумма чисел.
5	Значение площади исходного многоугольника выражено через площади составляющих его более простых многоугольников.
0	Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям.