1. Имеется 3-литровая банка, полностью наполненная молоком 3% жирности, и 4-литровый бидон с 3 литрами молока 1% жирности. Назовем «обменом» такую операцию: сначала 4-литровый бидон доливают до краев содержимым 3-литровой банки, затем делают наоборот. Какое минимальное количество «обменов» нужно совершить, чтобы концентрация жира в банках различалась менее чем на 0,01%? (8 баллов)

Решение. Обозначим через c_k и C_k концентрации жира (в %) в меньшей и в большей банке после k «обменов». В начале $c_0 = 3$, $C_0 = 1$. Если в четырехлитровый бидон с 3 л молока с процентным содержанием жира, равным C_k, доливают 1 л молока с процентным содержанием жира, равным c_k, то жирность молока в четырехлитровом бидоне становится равной $C_{k+1} = \frac{3C_k + c_k}{4}$. В результате обратного переливания 1 л молока концентрации C_{k+1} в трехлитровую банку, концентрация жира в ней становится равной

$c_{k+1} = \frac{1}{3}\left(2c_k + \frac{3C_k + c_k}{4}\right) = \frac{3c_k + C_k}{4}$. В итоге имеем $c_{k+1} - C_{k+1} = \frac{3c_k + C_k}{4} - \frac{3C_k + c_k}{4} = \frac{c_k - C_k}{2}$.

Следовательно, $c_k - C_k = 2^{-k}(c_0 - C_0) = 2 \cdot 2^{-k}$. Решаем неравенство $c_k - C_k = 2 \cdot 2^{-k} < 0{,}01$ $\Leftrightarrow\ 200 < 2^k\ \Leftrightarrow\ \log_2 200 < k$. Так как $7 = \log_2 128 < \log_2 200 < \log_2 256 = 8$, то минимальное число обменов $k = 8$. Ответ: 8 раз.

2. Решите неравенство $\log_x(16 - 24x + 9x^2) < 0$. (8 баллов)

Решение. ОДЗ: $x > 0, \quad x \neq 1, \quad x \neq 4/3$.

1) $0 < x < 1; \quad 16 - 24x + 9x^2 > 1 \Leftrightarrow 3x^2 - 8x + 5 > 0$; $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x < 1, \\ x > 5/3 \end{array}\right. \\ 0 < x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x < 1$;

2) $x > 1, \quad x \neq 4/3;\ 16 - 24x + 9x^2 < 1 \Leftrightarrow 3x^2 - 8x + 5 < 0 \Leftrightarrow 1 < x < 5/3,\ x \neq 4/3$.

Ответ: $x \in (0;1) \cup (1;4/3) \cup (4/3;5/3)$.

3. Сумма первых четырех членов геометрической прогрессии, равная 255, относится к первому члену прогрессии как 85:64. Найдите первый член и знаменатель прогрессии и определите, в каких пределах может изменяться сумма n членов прогрессии S_n.

Решение. $\frac{S_4}{a} = \frac{a\left(1 + q + q^2 + q^3\right)}{a} = 1 + q + q^2 + q^3 = \frac{85}{64}$.

$q^3 + q^2 + q = \frac{21}{64}$. Это уравнение легко решить подбором, если учесть следующее.

1. Функция $f(q) = q^3 + q^2 + q$ – возрастающая, так как $f'(q) = 3q^2 + 2q + 1 = 2q^2 + \left(q+1\right)^2 > 0$, следовательно, уравнение имеет единственный корень, очевидно, положительный, так как $f(0) = 0$.

2. Выполнив замену $q = \frac{m}{4}$, получим уравнение $m^3 + 4m^2 + 16m = 21$, для которого достаточно проверить значение $m = 1$.

Итак $q = \frac{1}{4}$. Из условия $a\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64}\right) = \frac{85}{64}a = 255 \Rightarrow a = 192$.

Ответ: $a = 192,\ q = \frac{1}{4},\ S_n = 192\frac{1 - (1/4)^n}{1 - 1/4} = 256\left(1 - (1/4)^n\right);\ 192 \le S_n < 256$.

4. Найдите все целочисленные решения системы

$$\begin{cases} 2\sin\dfrac{\pi y}{12}=\sqrt{1+4\sin^2\dfrac{\pi y}{12}\cos\dfrac{\pi x}{3}-\cos\dfrac{\pi x}{3}}, \\ x^2+y^2\le 25, \quad x\ge y. \end{cases}$$ (8 баллов)

Решение. Рассмотрим уравнение системы $2\sin\dfrac{\pi y}{12}=\sqrt{1+4\sin^2\dfrac{\pi y}{12}\cos\dfrac{\pi x}{3}-\cos\dfrac{\pi x}{3}}$.

При условии $\sin\dfrac{\pi y}{12}\ge 0$, т.е. при $24k\le y\le 12+24k,\ k\in Z,$ имеем

$4\sin^2\dfrac{\pi y}{12}-1-4\sin^2\dfrac{\pi y}{12}\cos\dfrac{\pi x}{3}+\cos\dfrac{\pi x}{3}=0 \iff (4\sin^2\dfrac{\pi y}{12}-1)(1-\cos\dfrac{\pi x}{3})=0 \iff 2\sin\dfrac{\pi y}{12}=1$ или $\cos\dfrac{\pi x}{3}=1 \iff y=2+24k,\ y=10+24k,\ k\in Z,$ или $x=6n,\ n\in Z$. Целочисленными решениями системы будут точки $(l;\ 2+24k),\ (l;\ 10+24k),\ (6n;\ m),\ l,k,n,m\in Z,\ \ 24s\le m\le 12+24s,\ s\in Z,$ лежащие в круге с центром в начале координат и радиусом 5 и в полуплоскости $x\ge y$. Такими точками будут $(0;\ 0),\ (2;\ 2),\ (3;\ 2),\ (4;\ 2)$.

Ответ: $(0;\ 0),\ (2;\ 2),\ (3;\ 2),\ (4;\ 2)$.

5. Решите неравенство $\dfrac{16\cdot 6^x-3^x-54\cdot 2^{x+3}+27}{(\log_4(x^2+4)-\log_{16}x^2-1)(\log_2(x+6)-2)}\le 0$. (10 баллов)

Решение. ОДЗ числителя и знаменателя: $x\in(-6;+\infty),\quad x\ne 0.$

Разложим числитель на множители:

$16\cdot 6^x-54\cdot 2^{x+3}-3^x+27=2^{x+4}(3^x-27)-(3^x-27)=(2^{x+4}-1)(3^x-3^3)$.

Имеем: $\dfrac{(2^{x+4}-1)(3^x-3^3)}{(\log_4(x^2+4)-\log_4 4|x|)(\log_2(x+6)-\log_2 4)}\le 0 \iff$ (на ОДЗ)

$\dfrac{(x+4)(x-3)}{(x^2+4-4|x|)(x+6-4)}\le 0 \iff \dfrac{(x+4)(x-3)}{(|x|-2)^2(x+2)}\le 0$.

Решая методом интервалов, получаем $x\in(-\infty;-4]\cup(-2;2)\cup(2;3]$.

С учетом ОДЗ имеем $x\in(-6;-4]\cup(-2;0)\cup(0;2)\cup(2;3]$.

Ответ: $x\in(-6;-4]\cup(-2;0)\cup(0;2)\cup(2;3]$.

6. Найдите множество значений функции $f(x)=g(g^2(x)-2g(x))$, где $g(x)=6x-2x^3$. (10 баллов)

Решение. Функция $g(x)=6x-2x^3$ определена на всей числовой оси и принимает все значения из промежутка $(-\infty;+\infty)$. Найдем промежутки монотонности и экстремумы функции $g(x)$. Вычислим производную $g'(x)=6-6x^2=-6(x-1)(x+1)$. Имеем $g'(x)<0$, если $x\in(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$, и $g'(x)>0$, если $x\in(-1;1)$. Таким образом, на промежутках $(-\infty;-1)$ и $(1;+\infty)$ функция $g(x)$ убывает, а на промежутке $(-1;1)$ возрастает. Точка $x=1$ является точкой максимума функции $g(x)$, $g_{\max}=g(1)=4$, точка $x=-1$ является точкой минимума функции $g(x)$, $g_{\min}=g(-1)=-4$.

Так как $f(x)=g(g^2(x)-2g(x))=g((g(x)-1)^2-1)$, а функция $(g(x)-1)^2-1$ принимает все значения из промежутка $[-1;+\infty)$, то для нахождения множества значений функции $f(x)$ достаточно найти множество значений функции $g(x)$ на промежутке $[-1;+\infty)$. На указанном промежутке $g(x)$ принимает все значения из множества $(-\infty;4]$.

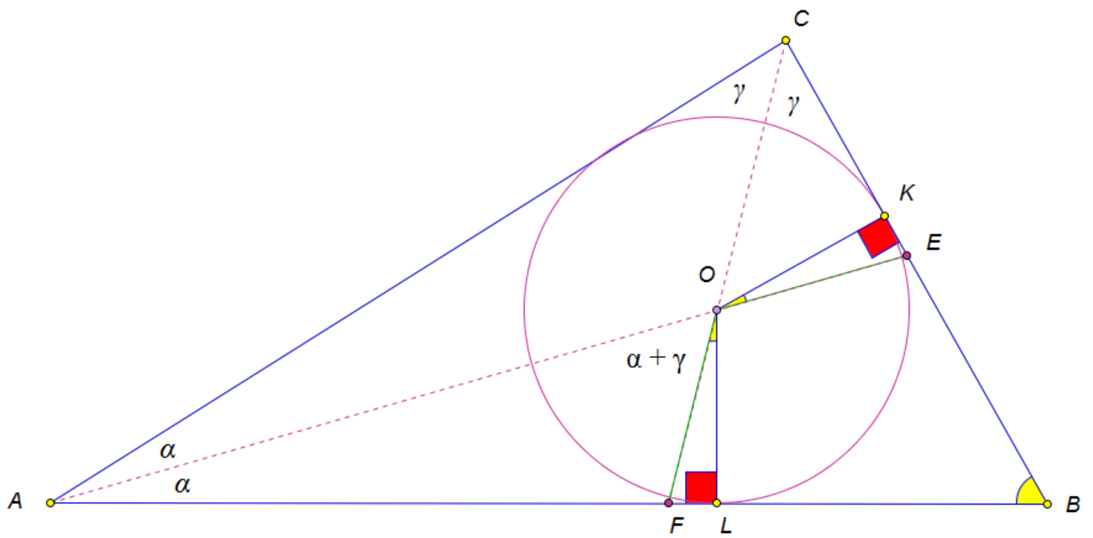
Ответ: $E_f=(-\infty;4]$.

7. В треугольнике ABC со сторонами $AB = 5$ и $BC = 3$ проведены биссектрисы AE и CF, которые пересекаются в точке O. Найдите радиус описанной около треугольника ABC окружности, если $OE = OF$.

Решение:

1. Обозначив $\angle A = 2\alpha$, $\angle C = 2\gamma$, вычислим величину углов $\angle AOF = \angle COE$. Эти углы являются внешними для треугольника *AOC*. И значит, $\angle AOF = \angle COE = \alpha + \gamma$.

2. Из точки *O* опустим высоты *OL* и *OK* на основания *AB* и *BC*, соответственно. При этом *OL*= *OK* (радиус вписанной окружности) и *OF* = *OE* (по условию). Отсюда следует, что $\angle FOL = \angle KOE$.



3. Заметим, что основание *K* высоты *OK* может оказаться как по одну, так и по другую сторону от точки *E*. Точно также, возможны два варианта расположения точки *L* по отношению к точке *F*. Всего получается четыре различных возможных случая. Вычислим и приравняем величины углов $\angle FOL$ и $\angle KOE$ для всех этих четырех случаев.

4. Из прямоугольного треугольника *AOL* имеем: $\angle FOL = \angle AOL - \angle AOF = (\pi/2 - \alpha) - (\alpha + \gamma) = \pi/2 - 2\alpha - \gamma$, если *L* находится справа от *F*; $\angle FOL = \angle AOF - \angle AOL = (\alpha + \gamma) - (\pi/2 - \alpha) = -\pi/2 + 2\alpha + \gamma$, если *L* находится слева *F*. Аналогично, из прямоугольного треугольника *KOE* имеем: $\angle KOE = \angle COE - \angle COK = (\alpha + \gamma) - (\pi/2 - \gamma) = -\pi/2 + \alpha + 2\gamma$, если точка *K* находится выше точки *E*; и $\angle KOE = \angle COK - \angle COE = (\pi/2 - \gamma) - (\alpha + \gamma) = \pi/2 - \alpha - 2\gamma$, если точка *K* находится ниже точки *E*.

5. Приравниваем величины углов $\angle FOL$ и $\angle KOE$ для этих четырех случаев:

а) $\pi/2 - 2\alpha - \gamma = \pi/2 - \alpha - 2\gamma \Rightarrow \alpha = \gamma \Rightarrow \angle A = \angle C$ (равнобедренный треугольник);

б) $\pi/2 - 2\alpha - \gamma = -\pi/2 + \alpha + 2\gamma \Rightarrow \alpha + \gamma = \pi/3 = 60° \Rightarrow \angle B = \pi - 2(\alpha + \gamma) = \pi/3 = 60°$;

в) $-\pi/2 + 2\alpha + \gamma = -\pi/2 + \alpha + 2\gamma \Rightarrow \alpha = \gamma \Rightarrow \angle A = \angle C$ (равнобедренный треугольник);

г) $-\pi/2 + 2\alpha + \gamma = \pi/2 - \alpha - 2\gamma \Rightarrow \alpha + \gamma = \pi/3 = 60° \Rightarrow \angle B = \pi - 2(\alpha + \gamma) = \pi/3 = 60°$;

6. Учитывая, что треугольник *ABC* по условию не является равнобедренным, получаем $\angle B = 60°$.

7. По теореме косинусов находим AC: $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cos\angle B$, $AC = \sqrt{19}$.

8. $R_{on\, ABC} = \dfrac{AC}{2\sin\angle B} = \dfrac{\sqrt{57}}{3}$. Ответ: $\dfrac{\sqrt{57}}{3}$.

8. Какую наименьшую площадь может иметь фигура на плоскости xy, расположенная между прямыми $x=-3,5$ и $x=1,5$ и ограниченная снизу осью x, а сверху – касательной к графику функции $y=156-x^4$ с абсциссой x_0 точки касания, лежащей в промежутке $-3,5\le x_0\le 1,5$? (12 баллов)

Решение. $y=156-x^4,\quad x_1=-3,5,\quad x_2=1,5$.

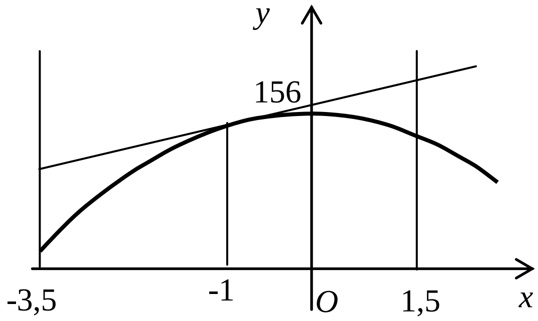
Уравнение касательной:

$y_к=156-x_0^4-4x_0^3\left(x-x_0\right),\ -3,5\le x_0\le 1,5$,

или $y_к=156+3x_0^4-4x_0^3x$.

$y_1=y_к\left(-3,5\right)=156+3x_0^4+14x_0^3$;

$y_2=y_к\left(1,5\right)=156+3x_0^4-6x_0^3$.



Полученная фигура – трапеция, площадь которой равна

$S\left(x_0\right)=0,5\left(y_1+y_2\right)\left(x_2-x_1\right)=\left(156+3x_0^4+4x_0^3\right)5$.

$S'\left(x_0\right)=5\left(12x_0^3+12x_0^2\right)=60x_0^2(x_0+1)$. $S'\left(x_0\right)=0$ при $x_0=-1$ и $x_0=0$.

$\min S\left(x_0\right)=S\left(-1\right)=5\left(156+3-4\right)=5\cdot 155=775$. Ответ: 775 кв. ед.

9. Укажите все значения a, при которых уравнение $\dfrac{1-\lg\left(10+x-a-2\left(x-a\right)^2\right)}{1-\lg x}=1$ имеет хотя бы один корень, и решите его при каждом a.

Решение. При $x>0,\ x\ne 10$ уравнение равносильно квадратному уравнению $2(x-a)^2=10-a$, или $2x^2-4ax+2a^2+a-10=0$ (*), у которого $D/4=4a^2-4a^2-2a+20=20-2a$.

Корень $x=10$ квадратного уравнения может получиться, когда $2(10-a)^2=10-a$, т.е. если 1) $a=10$, уравнение имеет вид $\left(x-10\right)^2=0$, тогда этот корень единственный и заданное уравнение корней не имеет, или 2) $2(10-a)=1$, т.е. $a=19/2$, тогда для x получаем уравнение $2\left(x-19/2\right)^2=10-19/2,\ x=19/2\pm 1/2$, у которого, кроме постороннего корня $x_1=10$, есть еще один корень $x_2=9$, удовлетворяющий заданному уравнению.

Рассмотрим остальные случаи, когда корень уравнения может быть единственным.

1. $\begin{cases}D/4=20-2a=0,\\ a>0,\quad a\ne 10.\end{cases}$ Заданное уравнение корней не имеет.

2. $2a^2+a-10<0$, т.е. при $-5/2<a<2$ $x=\left(2a+\sqrt{20-2a}\right)/2$.

3. $2a^2+a-10=0$, отсюда $a=2$, $2x^2-8x=0$, $x_1=0$ –посторонний корень, $x_2=4$ удовлетворяет условиям, или $a=-5/2$, $2x^2+10x=0$, $x_1=0,\ x_2=-10$ –посторонние корни.

Рассмотрим случаи, когда заданное уравнение будет иметь два различных корня. Квадратное уравнение (*) будет иметь два различных положительных корня

$x_{1,2}=\left(2a\pm\sqrt{20-2a}\right)/2$, если $\begin{cases}20-2a>0,\\ a>0,\\ 2a^2+a-10>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0<a<10,\\ \left[\begin{array}{l}a<-5/2,\\ a>2\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow 2<a<10$. Из этого множества надо убрать рассмотренную ранее точку $a=19/2$. Объединяя найденные значения a, получим ответ: $a\in\left(-5/2;2\right],\ x=\left(2a+\sqrt{20-2a}\right)/2$;

$a\in\left(2;19/2\right)\cup\left(19/2;10\right),\ x_{1,2}=\left(2a\pm\sqrt{20-2a}\right)/2$; $a=19/2,\ x=9$.