1. Имеется 3-литровая банка, полностью наполненная молоком 2% жирности, и 4-литровый бидон с 3 литрами обезжиренного молока. Назовем «обменом» такую операцию: сначала 4-литровый бидон доливают до краев содержимым 3-литровой банки, затем делают наоборот. Какое минимальное количество «обменов» нужно совершить, чтобы концентрация жира в банках различалась менее чем на 0,01%? (8 баллов)

Решение. Обозначим через c_k и C_k концентрации жира (в %) в меньшей и в большей банке после k «обменов». В начале $c_0 = 2$, $C_0 = 0$. Если в четырехлитровый бидон с 3 л молока с процентным содержанием жира, равным C_k, доливают 1 л молока с процентным содержанием жира, равным c_k, то жирность молока в четырехлитровом бидоне становится равной $C_{k+1} = \frac{3C_k + c_k}{4}$. В результате обратного переливания 1 л молока концентрации C_{k+1} в трехлитровую банку, концентрация жира в ней становится равной $c_{k+1} = \frac{1}{3}\left(2c_k + \frac{3C_k + c_k}{4}\right) = \frac{3c_k + C_k}{4}$. В итоге имеем $c_{k+1} - C_{k+1} = \frac{3c_k + C_k}{4} - \frac{3C_k + c_k}{4} = \frac{c_k - C_k}{2}$.

Следовательно, $c_k - C_k = 2^{-k}(c_0 - C_0) = 2 \cdot 2^{-k}$. Решаем неравенство $c_k - C_k = 2 \cdot 2^{-k} < 0{,}01$ $\Leftrightarrow 200 < 2^k \Leftrightarrow \log_2 200 < k$. Так как $7 = \log_2 128 < \log_2 200 < \log_2 256 = 8$, то минимальное число обменов $k = 8$. Ответ: 8 раз.

2. Решите неравенство $\log_x(64 - 112x + 49x^2) < 0$. (8 баллов)

Решение. ОДЗ: $x > 0, \quad x \neq 1, \quad x \neq 8/7$.

1) $0 < x < 1; \quad 64 - 112x + 49x^2 > 1 \Leftrightarrow 7x^2 - 16x + 9 > 0;\ \left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l} x < 1, \\ x > 9/7 \end{array}\right. \\ 0 < x < 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow 0 < x < 1;$

2) $x > 1, \quad x \neq 8/7;\ 64 - 112x + 49x^2 < 1 \Leftrightarrow 7x^2 - 16x + 9 < 0 \Leftrightarrow 1 < x < 9/7,\ x \neq 8/7$.

Ответ: $x \in (0;1) \cup (1;8/7) \cup (8/7;9/7)$.

3. Сумма первых четырех членов геометрической прогрессии, равная 80, относится к первому члену прогрессии как 40:27. Найдите первый член и знаменатель прогрессии и определите, в каких пределах может изменяться сумма n членов прогрессии S_n.

Решение. $\frac{S_4}{a} = \frac{a\left(1 + q + q^2 + q^3\right)}{a} = 1 + q + q^2 + q^3 = \frac{40}{27}$.

$q^3 + q^2 + q = \frac{13}{27}$. Это уравнение легко решить подбором, если учесть следующее.

1. Функция $f(q) = q^3 + q^2 + q$ – возрастающая, так как $f'(q) = 3q^2 + 2q + 1 = 2q^2 + (q+1)^2 > 0$, следовательно, уравнение имеет единственный корень, очевидно, положительный, так как $f(0) = 0$.

2. Выполнив замену $q = \frac{m}{3}$, получим уравнение $m^3 + 3m^2 + 9m = 13$, для которого достаточно проверить значение $m = 1$.

Итак $q = \frac{1}{3}$. Из условия $a\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27}\right) = \frac{40}{27}a = 80 \Rightarrow a = 54$.

Ответ: $a = 54,\ q = \frac{1}{3},\ S_n = 54\frac{1 - (1/3)^n}{1 - 1/3} = 81\left(1 - (1/3)^n\right);\ 54 \le S_n < 81$.

4. Найдите все целочисленные решения системы

$$\begin{cases} 2\sin\dfrac{\pi y}{6}=\sqrt{3+4\sin^2\dfrac{\pi y}{6}\cos\dfrac{\pi x}{3}-3\cos\dfrac{\pi x}{3}}, \\ x^2+y^2\le 16, \quad x\ge y. \end{cases}$$

(8 баллов)

Решение. Рассмотрим уравнение системы $2\sin\dfrac{\pi y}{6}=\sqrt{3+4\sin^2\dfrac{\pi y}{6}\cos\dfrac{\pi x}{3}-3\cos\dfrac{\pi x}{3}}$.

При условии $\sin\dfrac{\pi y}{6}\ge 0$, т.е. при $12k\le y\le 6+12k,\ k\in Z,$ имеем

$$4\sin^2\frac{\pi y}{6}-3-4\sin^2\frac{\pi y}{6}\cos\frac{\pi x}{3}+3\cos\frac{\pi x}{3}=0 \iff (4\sin^2\frac{\pi y}{6}-3)(1-\cos\frac{\pi x}{3})=0 \iff 2\sin\frac{\pi y}{6}=\sqrt{3}$$

или $\cos\dfrac{\pi x}{3}=1 \iff y=2+12k,\ y=4+12k,\ k\in Z,$ или $x=6n,\ n\in Z$. Целочисленными решениями системы будут точки $(l;\,2+12k),\,(l;\,4+12k),\,(6n;\,m),\ l,k,n,m\in Z,$ $12s\le m\le 6+12s,\ s\in Z,$ лежащие в круге с центром в начале координат и радиусом 4 и в полуплоскости $x\ge y$. Такими точками будут $(0;0),\,(2;2),\,(3;2)$.

Ответ: $(0;0),\,(2;2),\,(3;2)$.

5. Решите неравенство $\dfrac{8\cdot 6^x-54\cdot 2^{x+2}-3^x+27}{(\log_2(x^2+4)-\log_4 x^2-2)(\log_3(x+5)-1)}\le 0$. (10 баллов)

Решение. ОДЗ числителя и знаменателя: $x\in(-5;+\infty),\quad x\ne 0.$

Разложим числитель на множители:

$8\cdot 6^x-54\cdot 2^{x+2}-3^x+27=2^{x+3}(3^x-27)-(3^x-27)=(2^{x+3}-1)(3^x-3^3)$.

Имеем: $\dfrac{(2^{x+3}-1)(3^x-3^3)}{(\log_2(x^2+4)-\log_2 4|x|)(\log_3(x+5)-\log_3 3)}\le 0 \iff$ (на ОДЗ)

$$\frac{(x+3)(x-3)}{(x^2+4-4|x|)(x+5-3)}\le 0 \iff \frac{(x+3)(x-3)}{(|x|-2)^2(x+2)}\le 0.$$

Решая методом интервалов, получаем $x\in(-\infty;-3]\cup(-2;2)\cup(2;3]$.

С учетом ОДЗ имеем $x\in(-5;-3]\cup(-2;0)\cup(0;2)\cup(2;3]$.

Ответ: $x\in(-5;-3]\cup(-2;0)\cup(0;2)\cup(2;3]$.

6. Найдите множество значений функции $f(x)=g(g^2(x)-4g(x))$, где $g(x)=x^3-48x$. (10 баллов)

Решение. Функция $g(x)=x^3-48x$ определена на всей числовой оси и принимает все значения из промежутка $(-\infty;+\infty)$. Найдем промежутки монотонности и экстремумы функции $g(x)$. Вычислим производную $g'(x)=3x^2-48=3(x-4)(x+4)$. Имеем $g'(x)>0$, если $x\in(-\infty;-4)\cup(4;+\infty)$, и $g'(x)<0$, если $x\in(-4;4)$. Таким образом, на промежутках $(-\infty;-4)$ и $(4;+\infty)$ функция $g(x)$ возрастает, а на промежутке $(-4;4)$ убывает. Точка $x=-4$ является точкой максимума функции $g(x)$, $g_{\max}=g(-4)=128$, точка $x=4$ является точкой минимума функции $g(x)$, $g_{\min}=g(4)=-128$.

Так как $f(x)=g(g^2(x)-4g(x))=g((g(x)-2)^2-4)$, а функция $(g(x)-2)^2-4$ принимает все значения из промежутка $[-4;+\infty)$, то для нахождения множества значений функции $f(x)$ достаточно найти множество значений функции $g(x)$ на промежутке $[-4;+\infty)$. На указанном промежутке $g(x)$ принимает все значения из множества $[-128;+\infty)$.

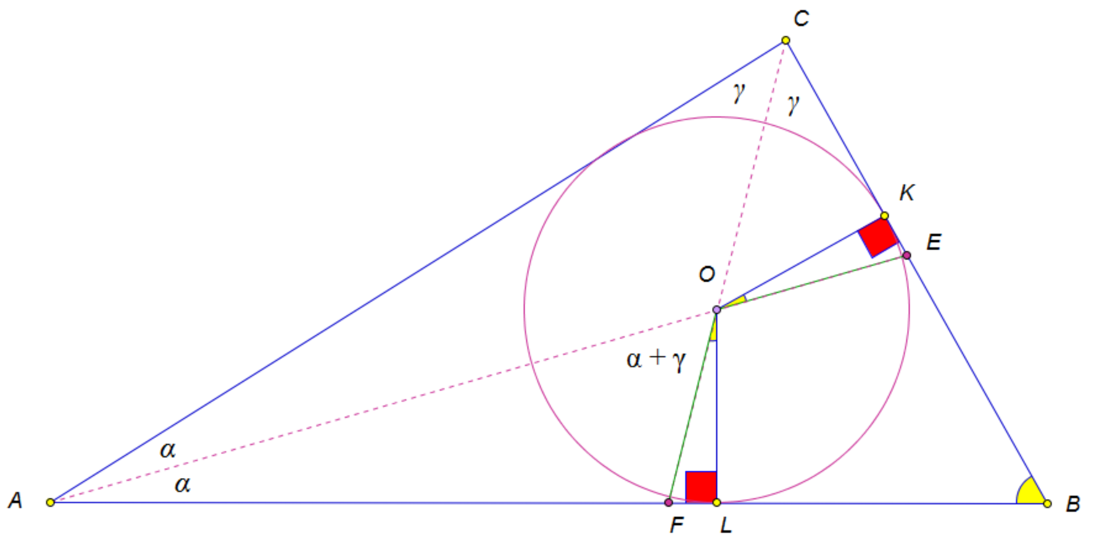
Ответ: $E_f=[-128;+\infty)$.

7. В треугольнике ABC со сторонами $AB = 4$ и $BC = 3$ проведены биссектрисы AE и CF, которые пересекаются в точке O. Найдите радиус описанной около треугольника ABC окружности, если $OE = OF$.

Решение:

1. Обозначив $\angle A = 2\alpha$, $\angle C = 2\gamma$, вычислим величину углов $\angle AOF = \angle COE$. Эти углы являются внешними для треугольника AOC. И значит, $\angle AOF = \angle COE = \alpha + \gamma$.

2. Из точки O опустим высоты OL и OK на основания AB и BC, соответственно. При этом $OL = OK$ (радиус вписанной окружности) и $OF = OE$ (по условию). Отсюда следует, что $\angle FOL = \angle KOE$.



3. Заметим, что основание K высоты OK может оказаться как по одну, так и по другую сторону от точки E. Точно также, возможны два варианта расположения точки L по отношению к точке F. Всего получается четыре различных возможных случая. Вычислим и приравняем величины углов $\angle FOL$ и $\angle KOE$ для всех этих четырех случаев.

4. Из прямоугольного треугольника AOL имеем: $\angle FOL = \angle AOL - \angle AOF = (\pi/2 - \alpha) - (\alpha + \gamma) = \pi/2 - 2\alpha - \gamma$, если L находится справа от F; $\angle FOL = \angle AOF - \angle AOL = (\alpha + \gamma) - (\pi/2 - \alpha) = -\pi/2 + 2\alpha + \gamma$, если L находится слева F. Аналогично, из прямоугольного треугольника KOE имеем: $\angle KOE = \angle COE - \angle COK = (\alpha + \gamma) - (\pi/2 - \gamma) = -\pi/2 + \alpha + 2\gamma$, если точка K находится выше точки E; и $\angle KOE = \angle COK - \angle COE = (\pi/2 - \gamma) - (\alpha + \gamma) = \pi/2 - \alpha - 2\gamma$, если точка K находится ниже точки E.

5. Приравниваем величины углов $\angle FOL$ и $\angle KOE$ для этих четырех случаев:

а) $\pi/2 - 2\alpha - \gamma = \pi/2 - \alpha - 2\gamma \Rightarrow \alpha = \gamma \Rightarrow \angle A = \angle C$ (равнобедренный треугольник);

б) $\pi/2 - 2\alpha - \gamma = -\pi/2 + \alpha + 2\gamma \Rightarrow \alpha + \gamma = \pi/3 = 60° \Rightarrow \angle B = \pi - 2(\alpha + \gamma) = \pi/3 = 60°$;

в) $-\pi/2 + 2\alpha + \gamma = -\pi/2 + \alpha + 2\gamma \Rightarrow \alpha = \gamma \Rightarrow \angle A = \angle C$ (равнобедренный треугольник);

г) $-\pi/2 + 2\alpha + \gamma = \pi/2 - \alpha - 2\gamma \Rightarrow \alpha + \gamma = \pi/3 = 60° \Rightarrow \angle B = \pi - 2(\alpha + \gamma) = \pi/3 = 60°$;

6. Учитывая, что треугольник ABC по условию не является равнобедренным, получаем $\angle B = 60°$.

7. По теореме косинусов находим AC: $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cos\angle B$, $AC = \sqrt{13}$.

8. $R_{on\,ABC} = \dfrac{AC}{2\sin\angle B} = \dfrac{\sqrt{39}}{3}$. Ответ: $\dfrac{\sqrt{39}}{3}$.

8. Какую наименьшую площадь может иметь фигура на плоскости xy, расположенная между прямыми $x=-2$ и $x=4$ и ограниченная снизу осью x, а сверху – касательной к графику функции $y=256-x^4$ с абсциссой x_0 точки касания, лежащей в промежутке $-2 \le x_0 \le 4$?

Решение. $y=256-x^4$, $x_1=-2$, $x_2=4$. (12 баллов)

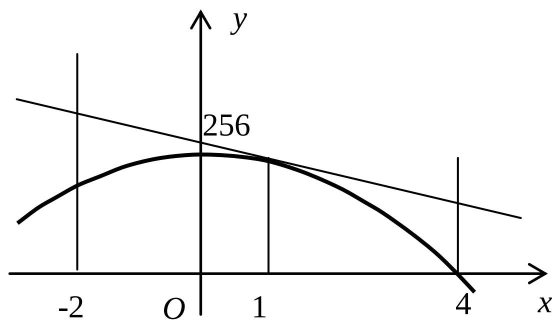
Уравнение касательной:

$y_к = 256 - x_0^4 - 4x_0^3\left(x-x_0\right)$, $-2 \le x_0 \le 4$,

или $y_к = 256 + 3x_0^4 - 4x_0^3 x$.

$y_1 = y_к\left(-2\right) = 256 + 3x_0^4 + 8x_0^3$;

$y_2 = y_к\left(4\right) = 256 + 3x_0^4 - 16x_0^3$.



Полученная фигура – трапеция, площадь которой равна

$S\left(x_0\right) = 0,5\left(y_1+y_2\right)\left(x_2-x_1\right) = \left(256+3x_0^4-4x_0^3\right)6$.

$S'\left(x_0\right) = 6\left(12x_0^3-12x_0^2\right) = 72x_0^2(x_0-1)$. $S'\left(x_0\right)=0$ при $x_0=0$ и $x_0=1$.

$\min S\left(x_0\right) = S\left(1\right) = 6\left(256+3-4\right) = 6\cdot 255 = 1530$.

Ответ: 1530 кв. ед.

9. Укажите все значения a, при которых уравнение $\dfrac{1-\log_3\left(3+x-a-2\left(x-a\right)^2\right)}{1-\log_3 x}=1$ имеет хотя бы один корень, и решите его при каждом a.

Решение. При $x>0$, $x\ne 3$ уравнение равносильно квадратному уравнению $2(x-a)^2=3-a$, или $2x^2-4ax+2a^2+a-3=0$ (*), у которого $D/4=4a^2-4a^2-2a+6=6-2a$.

Корень $x=3$ квадратного уравнения может получиться, когда $2(3-a)^2=3-a$, т.е. если 1) $a=3$, уравнение имеет вид $\left(x-3\right)^2=0$, тогда этот корень единственный и заданное уравнение корней не имеет, или 2) $2(3-a)=1$, т.е. $a=5/2$, тогда для x получаем уравнение $2\left(x-5/2\right)^2=3-5/2$, $x=5/2\pm 1/2$, у которого, кроме постороннего корня $x_1=3$, есть еще один корень $x_2=2$, удовлетворяющий заданному уравнению.

Рассмотрим остальные случаи, когда корень уравнения может быть единственным.

1. $\begin{cases} D/4=6-2a=0, \\ a>0, \quad a\ne 3. \end{cases}$ Заданное уравнение корней не имеет.

2. $2a^2+a-3<0$, т.е. при $-3/2<a<1$ $x=\left(2a+\sqrt{6-2a}\right)/2$.

3. $2a^2+a-3=0$, отсюда $a=1$, $2x^2-4x=0$, $x_1=0$ –посторонний корень, $x_2=2$ удовлетворяет условиям, или $a=-3/2$, $2x^2+6x=0$, $x_1=0$, $x_2=-3$ –посторонние корни.

Рассмотрим случаи, когда заданное уравнение будет иметь два различных корня. Квадратное уравнение (*) будет иметь два различных положительных корня

$x_{1,2}=\left(2a\pm\sqrt{6-2a}\right)/2$, если $\begin{cases} 6-2a>0, \\ a>0, \\ 2a^2+a-3>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0<a<3, \\ \left[\begin{array}{l} a<-3/2, \\ a>1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow 1<a<3$. Из этого множества надо убрать рассмотренную ранее точку $a=5/2$. Объединяя найденные значения a, получим ответ.

Ответ: $a\in\left(-3/2;1\right]$, $x=\left(2a+\sqrt{6-2a}\right)/2$; $a\in\left(1;5/2\right)\cup\left(5/2;3\right)$, $x_{1,2}=\left(2a\pm\sqrt{6-2a}\right)/2$; $a=5/2$, $x=2$.