"УТВЕРЖДАЮ"

Ректор МГТУ им. Н.Э. Баумана

________________А.А. Александров

"_____"_______________2013 г.

Заключительный этап академического соревнования Олимпиады школьников «Шаг в будущее» по образовательному предмету «Математика»

Типовой вариант задания

1. Один автомобиль проходит в минуту на 240 м больше, чем другой, поэтому затрачивает на прохождение одного километра на 12,5 секунды меньше. На сколько метров первый автомобиль увеличивает расстояние от второго за время, пока второй проходит 1 км? (8 баллов)

2. Сколько членов содержится в возрастающей арифметической прогрессии с положительными членами, у которой сумма членов с нечетными номерами составляет 52% суммы членов всей прогрессии? (8 баллов)

3. Решите уравнение $2^x \cdot 9^{\frac{x}{x-1}} = \frac{3}{2}$. (8 баллов)

4. Решите уравнение $tg\, 2x - \sqrt{\frac{\sin x \cos x}{1-\sin x \cos x}} = 0$. (8 баллов)

5. Решите неравенство $\frac{(3-\cos 2\pi x - 4\sin \pi x)(\log_2(x^2-x)-1)}{\sqrt{2x+1}-\sqrt{2x+4}} \geq 0.$ (10 баллов)

6. Найдите множество значений функции $f(x) = \log_9\left(3-\left|2^{1-x^2+2x}-2\right|\right)$. (10 баллов)

7. Площадь равнобокой трапеции равна 450. Окружность, построенная на боковой стороне трапеции как на диаметре, касается прямой, содержащей другую боковую сторону, и делит большее основание трапеции в отношении $24:25$. Найдите стороны трапеции. (12 баллов)

8. Какую наибольшую площадь может иметь плоский треугольник, ограниченный осью Ox прямой $x=\frac{3}{2}$ и касательной к графику функции $y = 2x^2$ в точке с абсциссой x_0, если $0 < x_0 < 3$? (12 баллов)

9. Укажите все значения a, при которых система уравнений

$$(x-a)^2 = x - y - a + 30, \quad \frac{1-\log_{30} y}{1-\log_{30} x} = 1$$

имеет хотя бы одно решение, и решите ее при каждом a. (12 баллов)

10. В сферу радиуса R вписана пирамида $TABC$, основанием которой служит треугольник ABC с прямым углом C и углом A, равным $60°$. Боковое ребро TA совпадает с высотой пирамиды, а угол между боковым ребром TB и биссектрисой основания AD равен $60°$. Какую наименьшую площадь может иметь сечение пирамиды плоскостью, проходящей через биссектрису AD и пересекающей ребро TB? (12 баллов)

1. Пусть V м/сек – скорость первого автомобиля, тогда $V-4$ – скорость второго. Тогда $\frac{1000}{V-4}=\frac{1000}{V}+12{,}5;\ \frac{80}{V-4}=\frac{80}{V}+1;\ V^2-4V-320=0,\ V=2\pm18; V_1=20,\ V_2=20-4=16$.

$\Delta l=\frac{1000\cdot 20}{16}-1000=250$. **Ответ**: 250 м.

2. Так как каждый последующий член возрастающей арифметической прогрессии больше предыдущего, число членов прогрессии не может быть четным, иначе сумма членов с нечетными номерами будет меньше суммы членов с четными номерами. Пусть число членов прогрессии n. Тогда $S_{even}=a_1+a_3+...+a_n=\frac{a_1+a_n}{2}\cdot\frac{n+1}{2}$.

$S=a_1+...+a_n=\frac{a_1+a_n}{2}\cdot n$. $\frac{S_{even}}{S}=\frac{n+1}{2\cdot n}=\frac{52}{100}=\frac{13}{25}$, отсюда $25n+25=26n,\quad n=25$.

Ответ: $n=25$.

3. Прологарифмируем обе части уравнения по основанию 3: $\log_3\left(2^x\cdot 9^{\frac{x}{x-1}}\right)=\log_3\frac{3}{2}$;

$x\log_3 2+\frac{2x}{x-1}=1-\log_3 2$; $(x+1)\log_3 2+\frac{x+1}{x-1}=0$; $(x+1)(\log_3 2+\frac{1}{x-1})=0$.

1) $x=-1$, 2) $x=1-\log_2 3$. **Ответ:** $\{-1;1-\log_2 3\}$.

4. $tg\,2x=\sqrt{\frac{2\sin x\cos x}{2-2\sin x\cos x}}$. При условии $tg\,2x\ge 0$ возводим в квадрат обе части уравнения: $tg^2\,2x=\frac{\sin 2x}{2-\sin 2x}\Leftrightarrow\frac{\sin^2 2x}{1-\sin^2 2x}=\frac{\sin 2x}{2-\sin 2x}\Leftrightarrow$ 1) $\sin 2x=0\ \ x=\frac{\pi n}{2},\ n\in Z$ или

2) $\frac{\sin 2x}{1-\sin^2 2x}=\frac{1}{2-\sin 2x}\Leftrightarrow\ \sin 2x\ne\pm1,\quad \sin 2x(2-\sin 2x)=1-\sin^2 2x\Leftrightarrow\ \sin 2x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow$

$2x=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n,\quad n\in Z$. С учетом условия $tg\,2x\ge 0$ окончательно имеем $x=\frac{\pi n}{2}$, $x=\frac{\pi}{12}+\pi n,\ \ n\in Z$. **Ответ:** $x=\frac{\pi n}{2},\ x=\frac{\pi}{12}+\pi n,\ \ n\in Z$.

5. $\frac{(3-\cos 2\pi x-4\sin\pi x)(\log_2(x^2-x)-1)}{\sqrt{2x+1}-\sqrt{2x+4}}\ge 0.$ ОДЗ: $2x+1\ge 0,\quad x(x-1)>0\ \Rightarrow$

$x\in[-0{,}5;\,0)\cup(1;\,+\infty)$. Так как $\sqrt{2x+1}-\sqrt{2x+4}<0$, то на ОДЗ исходное неравенство эквивалентно следующему

$$(2\sin^2 \pi x - 4\sin \pi x + 2)(x^2 - x - 2) \le 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\sin \pi x - 1)^2 (x+1)(x-2) \le 0 \quad \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin \pi x = 1, \\ x \in [-1;\, 2] \end{array} \right.$$

С учетом ОДЗ имеем $x \in [-0{,}5;\, 0) \cup (1;\, 2] \cup \left\{ \frac{1}{2} + 2n,\ n \in N \right\}$

Ответ: $x \in [-0{,}5;\, 0) \cup (1;\, 2] \cup \left\{ \frac{1}{2} + 2n,\ n \in N \right\}$.

6. $f(x) = \log_9 \left(3 - \left|2^{1-x^2+2x} - 2\right|\right)$ Функция $t = 1 - x^2 + 2x$ или $t = 2 - (x-1)^2$ принимает значения $t \in (-\infty;\, 2]$. Функция $z = 2^t$, где $t \in (-\infty;\, 2]$ принимает значения $z \in (0;\, 4]$. Рассмотрим функцию $y = \log_9 (3 - |z-2|)$, определенную на полуинтервале $(0;\, 4]$. Если $z \in (0;\, 2]$, то $y = \log_9 (1+z)$, и функция возрастает и принимает все значения из промежутка $(0;\, 0{,}5]$. Если $z \in (2;\, 4]$, то $y = \log_9 (5-z)$, и функция убывает и принимает все значения из промежутка $[0;\, 0{,}5)$. Объединяя полученные множества значений, получаем $E_f = [0;\, 0{,}5]$.

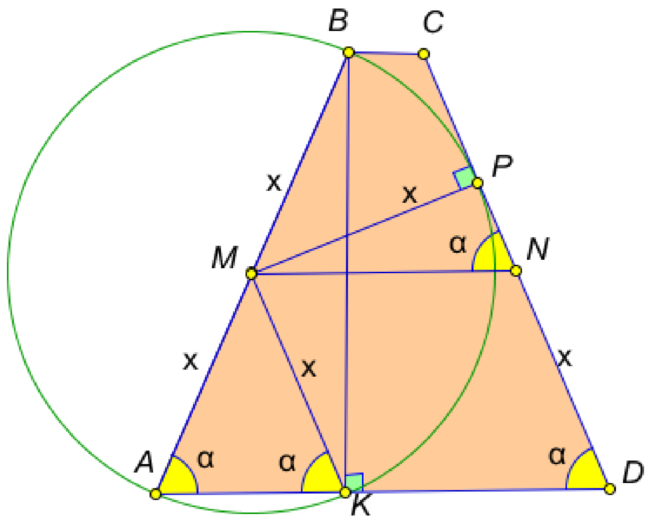
Ответ: $E_f = [0;\, 0{,}5]$.

7. ABCD - равнобокая трапеция, $AB = CD$, $\angle A$ - острый, AB - диаметр окружности, M - центр окружности, P - точка касания окружности боковой стороны CD. Обозначим радиус окружности x. Тогда $AM = MB = MP = x$. Пусть N - середина стороны CD, тогда треугольник MPN прямоугольный, $\angle P = 90^\circ$, $\angle MNP = \angle A = \alpha$, $MN = \dfrac{x}{\sin \alpha}$. Пусть K - точка пересечения окружности с основанием AD $(K \ne A)$. Треугольник ABK - прямоугольный, $\angle K = 90^\circ$, BK - высота трапеции, $BK = AB \sin \alpha = 2x \sin \alpha$.

$S_{ABCD} = MN \cdot BK = 2x^2 = 450 \quad \Rightarrow \quad x = 15$,

$AB = CD = 2x = 30$.

$AK = AB \cos \alpha = 2x \cos \alpha$, $KMND$ - параллелограмм, $KD = MN = \dfrac{x}{\sin \alpha}$.



$$\frac{AK}{KD} = \frac{24}{25} \quad \Rightarrow \quad 2\cos \alpha \sin \alpha = \frac{24}{25} \quad \Rightarrow$$

$$\sin 2\alpha = \frac{24}{25} \quad \Rightarrow \quad \cos 2\alpha = \pm \frac{7}{25} \quad \Rightarrow$$

1) $\sin \alpha = \sqrt{\dfrac{1 - \cos 2\alpha}{2}} = \dfrac{3}{5}$,

$\cos \alpha = \sqrt{\dfrac{1 + \cos 2\alpha}{2}} = \dfrac{4}{5}$ или

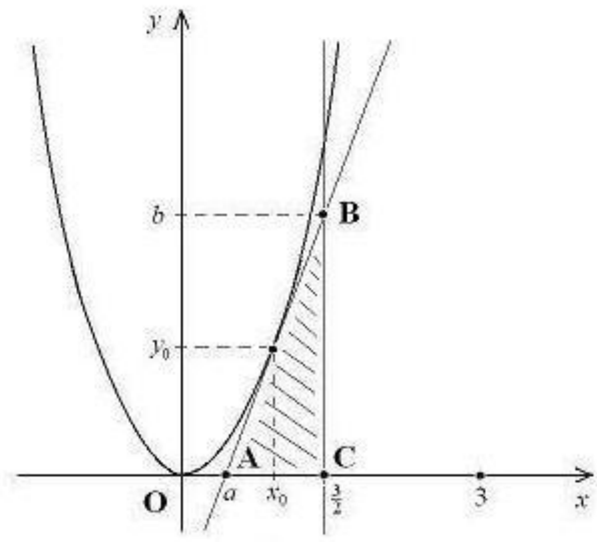
2) $\sin \alpha = \dfrac{4}{5}$, $\cos \alpha = \dfrac{3}{5}$.

Для первого случая имеем: $AK = 2x\cos\alpha = 24$, $KD = \dfrac{x}{\sin\alpha} = 25$, $AD = AK + KD = 49$,
$BC = 2MN - AD = 1$.

Для второго случая имеем: $AK = 2x\cos\alpha = 18$, $KD = \dfrac{x}{\sin\alpha} = \dfrac{75}{4}$, $AD = AK + KD = \dfrac{147}{4}$,
$BC = 2MN - AD = \dfrac{3}{4}$.

Ответ: 1, 49, 30, 30 или $\dfrac{3}{4}$, $\dfrac{147}{4}$, 30, 30.

8. Составим уравнение касательной к графику функции $y = 2x^2$ в точке с абсциссой x_0: $y_{кас} = 4x_0(x - x_0) + 2x_0^2$. Пусть точки $A(a;0)$ и $B(\frac{3}{2};b)$ - точки пересечения касательной с осью Ox и прямой $x = \dfrac{3}{2}$, соответственно.



Подставим координаты этих точек в уравнение касательной и выразим a и b через x_0:

$b = 4x_0(1{,}5 - x_0) + 2x_0^2 = 6x_0 - 2x_0^2$ =

Отметим, что из условия $0 < x_0 < 3$ следует $0 < a < \dfrac{3}{2}$, и потому точка $A(a;0)$ находится на оси абсцисс слева от точки $C(\frac{3}{2};0)$. Тогда площадь треугольника ABC равна $S = \dfrac{(1{,}5 - a)b}{2} = \dfrac{x_0(3 - x_0)^2}{2}$.

Находим экстремумы полученной функции $S = S(x_0)$ в интервале $(0;3)$. Функция S в каждой точке этого интервала имеет производную. Определим нули ее производной: $S' = \dfrac{(3 - x_0)^2 - 2x_0(3 - x_0)}{2} = \dfrac{3(x_0 - 3)(x_0 - 1)}{2} = 0$, $x_0 = 1$. Так как в интервале $(0;1)$ верно неравенство $S'(x_0) > 0$, а в интервале $(1;3)$ верно неравенство $S'(x_0) < 0$, то $x_0 = 1$ - единственная точка максимума в интервале $(0;3)$. Следовательно, $S_{\max} = S(1) = 2$. Наибольшая площадь треугольника равна 2. **Ответ:** 2.

9. $\left(x-a\right)^2 = x-y-a+30,\quad \dfrac{1-\log_{30} y}{1-\log_{30} x}=1$. Второе уравнение равносильно системе:

$x>0,\ \ x\neq 30,\ \ y=x$. Подставляя $y=x$ в первое уравнение, получаем; $(x-a)^2=30-a$, или $x^2-2ax+a^2+a-30=0$ (*), у которого $D/4=a^2-a^2-a+30=30-a$. Количество решений заданной системы уравнений зависит от числа корней этого квадратного уравнения.

Корень $x=30$ квадратного уравнения может получиться, когда $(30-a)^2=30-a$, т.е. если 1) $a=30$, уравнение имеет вид $\left(x-30\right)^2=0$, тогда этот корень единственный и заданная система решений не имеет, или 2) $(30-a)=1$, т.е. $a=29$, тогда для *x* получаем уравнение $\left(x-29\right)^2=1,\ \ x=29\pm 1$, у которого, кроме постороннего корня $x_1=30$, есть еще один корень $x_2=28$, удовлетворяющий условиям, и заданная система имеет единственное решение $(28;28)$.

Рассмотрим все случаи, когда система может иметь единственное решение.

1. $\begin{cases} D/4=30-a=0, \\ a>0,\quad a\neq 30. \end{cases}$ Система решений не имеет.

2. $a^2+a-30<0$, т.е. при $-6<a<5 \quad x=a+\sqrt{30-a}$.

3. $a^2+a-30=0$, отсюда $a=5$, $x^2-10x=0$, $x_1=0$ –посторонний корень, $x_2=10$ удовлетворяет условиям, или $a=-6$, $x^2+12x=0$, $x_1=0,\ \ x_2=-12$ –посторонние корни.

Рассмотрим случаи, когда система будет иметь два различных решения. Квадратное уравнение (*) будет иметь два различных положительных корня $x_{1,2}=a\pm\sqrt{30-a}$, если

$$\begin{cases} 30-a>0, \\ a>0, \\ a^2+a-30>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0<a<30, \\ \left[\begin{array}{l} a<-6, \\ a>5 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow 5<a<30.$$

Из этого множества надо убрать рассмотренную ранее точку $a=29$.

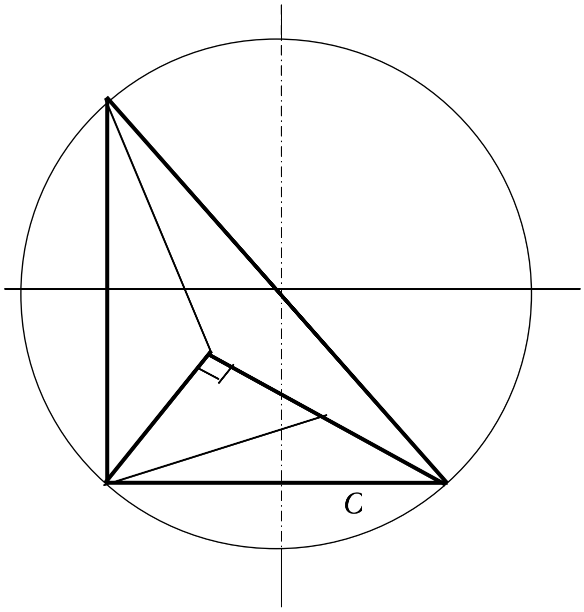
Объединяя найденные значения a, получим ответ.

Ответ: $a\in\left(-6;5\right],\ \ x=y=a+\sqrt{30-a}$;

$a\in\left(5;29\right)\cup\left(29;30\right),\ \ x_{1,2}=y_{1,2}=a\pm\sqrt{30-a}$;

$a=29,\ \ x=y=28$.

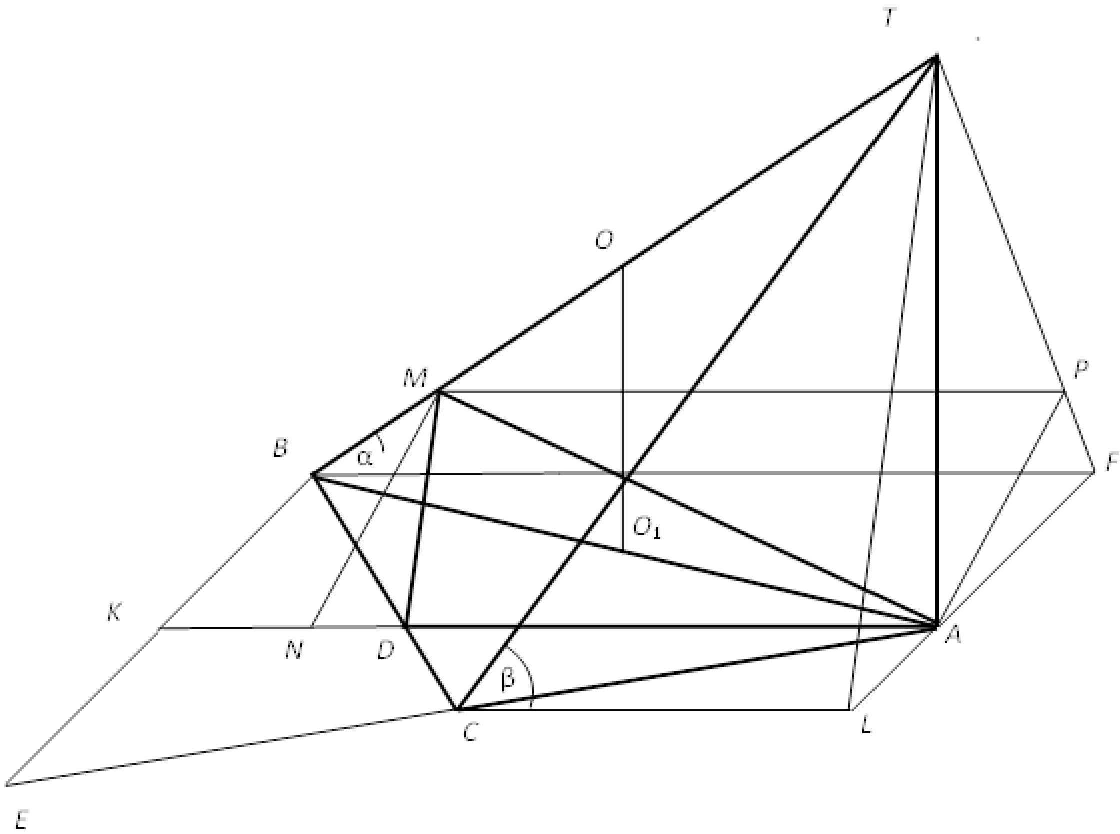
$a\in\left(1/4;1/2\right)\cup\left(1/2;+\infty\right),\ \ x_1=0,\ \ y_1=1-1/4a;\ \ x_2=1,\ \ y_2=1;\ \ x_3=\left(4a-1\right)^2,\ \ y_3=4a-1.$



10. Так как ΔABC прямоугольный, центр описанной окружности O_1 лежит на середине гипотенузы AB, а центр сферы лежит на перпендикуляре к плоскости ABC, проходящем через O_1. Так как ΔABT прямоугольный и перпендикулярен плоскости основания, то OO_1 лежит в нем и середина гипотенузы BT – центр описанной сферы O. следовательно $BT = 2R$. Для наглядности достроим ΔABC до равностороннего ΔABE, тогда D – точка пересечения его биссектрис и медиан.

Проведем $BF \| AD$ и $AF \perp AD$, тогда $\angle TBF = \alpha$ – заданный в условиях угол между боковым ребром TB и биссектрисой основания AD.

Проведем $CL \| AD$ и $AL \perp AD$, тогда $\angle TCL = \beta$ – заданный в условиях угол между боковым ребром TC и биссектрисой основания AD.



Проведем $AP \perp TF$, $PM \parallel FB$ и $MN \perp AK$; MN – общий перпендикуляр к AD и TB, причем $MN = AP$. Очевидно, MN – высота треугольника AMD, при которой сечение пирамиды плоскостью, проходящей через биссектрису AD и пересекающей ребро будет иметь наименьшую площадь $S_{\Delta AMD} = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot MN$.

По условию $\alpha = 60°$. Пусть $AB = a$. Тогда $BF = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $TF = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{3} = \frac{3}{2}a$, $AF = \frac{a}{2}$,

$AT = \sqrt{TF^2 - AF^2} = \sqrt{\frac{9}{4}a^2 - \frac{1}{4}a^2} = a\sqrt{2}$. $AP = \frac{AT \cdot AF}{TF} = \frac{a\sqrt{2} \cdot a \cdot 2}{2 \cdot 3a} = \frac{a\sqrt{2}}{3}$. $AD = \frac{2}{3} \cdot BF = \frac{a}{\sqrt{3}}$.

$2R = BT = \frac{BF}{\cos\alpha} = \frac{a\sqrt{3}}{2\cos 60°} = a\sqrt{3} \Rightarrow a = \frac{2R}{\sqrt{3}}$.

$S_{\Delta AMD} = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot AP = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{\sqrt{3}} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{3} = \frac{\sqrt{2}}{6\sqrt{3}}a^2 = \frac{2\sqrt{2}}{9\sqrt{3}}R^2$.

Ответ: $\frac{2\sqrt{2}}{9\sqrt{3}}R^2$