ВАРИАНТ 1 (10 класс)

1. Решить уравнение $(x-1)(x+2)(x+4)(x+7)=100$.

2. Пусть $a=\sqrt{1580}-\sqrt{1581}$. Вычислить $a^2+\dfrac{1}{a^2}$.

3. Три группы рыбаков поймали 113 рыб. На каждого рыбака I группы пришлось по 13 рыб, на каждого рыбака II группы - по 5 рыб и на каждого рыбака III группы – по 4 рыбы. Сколько рыбаков было в каждой группе, если всего их было 16?

4. Найти функцию, удовлетворяющую уравнению $f(x)+2f\left(\dfrac{1}{x}\right)=x$.

5. Найти площадь фигуры, заданной на координатной плоскости неравенством $3|y-x|+|3y+x|\le 12$.

6. Найти все значения параметра *a*, при которых в решении неравенства $x^2-4ax+2x+8a^2-2\le 0$ содержится хотя бы одно целое число. Какое наибольшее количество целых чисел может содержаться в решении данного неравенства?

7. Решить уравнение $\sqrt[5]{x}(\sqrt{5}+\sqrt[5]{x^2}+\sqrt{3})+3x(\sqrt{5}+9x^2+\sqrt{3})=0$.

8. Площадь треугольника *ABC* равна 24, $AB:BC=5:3$, расстояние от середины биссектрисы *BD* до стороны *AB* равно 3/2. Найти *BC*.

9. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA'B'C'D'$ с ребрами $AB=3$, $AD=7$, $AA'=5\sqrt{2}$ через диагональ BD' проведена плоскость, пересекающая ребро AA' так, что сечение параллелепипеда этой плоскостью имеет наименьший периметр. Найти этот периметр.

10. Три куба $ABCDA'B'C'D'$ с ребром *a*, $DKLND''K'L'N'$ с ребром *b* и $NEFTN''E'F'Y'$ с ребром *c* совмещены гранями так, что $K\in(DC)$, $D''\in(DD')$, $E\in(LN)$, $N''\in(NN')$. Числа *a*, *b*, *c* образуют геометрическую прогрессию. Найти знаменатель этой прогрессии, если $(C'N')\perp(DF')$.

ВАРИАНТ 2 (10 класс)

1. Решить уравнение $x(x+2)(x+4)(x+6)=-16$.

2. Пусть $a=\sqrt{2012}-\sqrt{2013}$. Вычислить $a^2+\dfrac{1}{a^2}$.

3. В командных соревнованиях для получения одного призового места необходимо набрать *n* очков. В составе каждой команды 3 игрока. У одной из команд сумма набранных очков оказалась меньше *n*. Если бы 1-й игрок этой команды имел вдвое больше очков, то командная сумма составила бы $2n-34$ очков. С другой стороны, если бы 3-му игроку добавили бы вдвое больше очков, чем у него было, то та же сумма составила бы

$2n+6$ очков. Найти *n*, если известно, что 2-й игрок этой команды имел на 9 очков больше, чем 1-й.

4. Найти функцию, удовлетворяющую уравнению $f(x)-2f\left(\dfrac{1}{x}\right)=3x$.

5. Найти площадь фигуры, заданной на координатной плоскости неравенством $x^2+y^2+6(x-|y|)\le 0$.

6. Найти все значения параметра *a*, при которых в решении неравенства $x^2-4ax-2x+8a^2-4a-4\le 0$ содержится хотя бы одно целое число. Какое наибольшее количество целых чисел может содержаться в решении этого неравенства?

7. Решить уравнение $\sqrt[3]{x}(\sqrt{2}+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt{3})+2x(\sqrt{2}+4x^2+\sqrt{3})=0$.

8. В треугольнике *ABC* проведены высоты *BM* и *CN*, при этом $MN=10,\ BC=26$. Найти расстояние между серединами отрезков *MN* и *BC*.

9. Равносторонний треугольник *ABC* со стороной 1 служит основанием пирамиды *SABC*, а ребро $SA=2$ является ее высотой. Провести через ребро *SB* плоскость так, чтобы получить в сечении пирамиды треугольник с наименьшим периметром. Найти этот периметр.

10. Два куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и $DKLND_2K_1L_1N_1$ совмещены гранями так, что вершина D_2 второго куба лежит на ребре DD_1, вершина *K* на ребре DC первого куба. Тангенс угла φ между прямыми B_1N_1 и AD_2 равен $0,6\sqrt{5}$. Найти соотношение между ребрами кубов.

Задание	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**Итого**
Баллы	8	8	10	10	10	10	10	10	12	12	**100**

Критерии оценивания задания олимпиады:

$+$ - полное обоснованное решение задачи.

$\pm$ - арифметическая ошибка в конце решения задачи; ошибка при выписывании ответа.

$\dfrac{1}{2}$ - получены существенные промежуточные результаты.

$\mp$ - получены некоторые промежуточные результаты; арифметическая ошибка допущена вначале решения, которая, при правильном ходе решения задачи, возможно, привела к неверному ответу.

$-$ - решение задачи неверно.

«нет»- решение задачи отсутствует.

Решение задач 1 варианта (10 класс)

Задача 1. *Решить уравнение* $(x-1)(x+2)(x+4)(x+7)=100$.

Решение. Перемножая в уравнении средние скобки и первую скобку с последней, получаем, что $(x^2+6x+8)(x^2+6x-7)=100$. При замене $t=x^2+6x-7$

имеем уравнение $t(t+15)=100$, корнями которого являются числа -20 и 5. Возвращаясь к переменной x получаем $x=-3\pm\sqrt{21}$.

Ответ: $-3\pm\sqrt{21}$.

Задача 2. *Пусть* $a=\sqrt{1580}-\sqrt{1581}$. *Вычислить* $a^2+\dfrac{1}{a^2}$.

Решение.

$$a^2+\frac{1}{a^2}=\left(a+\frac{1}{a}\right)^2-2=\left(\sqrt{1580}-\sqrt{1581}+\frac{1}{\sqrt{1580}-\sqrt{1581}}\right)^2-2=$$

$$=\left(\sqrt{1580}-\sqrt{1581}+\frac{\sqrt{1580}+\sqrt{1581}}{-1}\right)^2-2=\left(-2\sqrt{1581}\right)^2-2=6322.$$

Ответ: 6322.

Задача 3. *Три группы рыбаков поймали 113 рыб. На каждого рыбака 1 группы пришлось по 13 рыб, на каждого рыбака II группы - по 5 рыб и на каждого рыбака III группы – по 4 рыбы. Сколько рыбаков было в каждой группе, если всего их было 16?*

Решение. Пусть x, y, z - соответственно число рыбаков в 1-й, 2-й и третьей группах. Тогда $\begin{cases}13x+5y+4z=113,\\ x+y+z=16\end{cases}$. Решением этой системы могут быть только целые положительные числа. Покажем, что с учетом этого факта данная система имеет единственное решение. Из системы следует, что $9x=49-y$. Так как $x>0,\ z>0$, то $y=16-x-z<16$. Таким образом, правая часть выражения $9x=49-y$ кратна 9 и в тоже время заключена между 33 и 49. Значит, либо $9x=36$, либо $9x=45$. В первом случае $x=4, y=13, z=-1$, что противоречит положительности z. Во втором случае $x=5,\ y=4,\ z=7$.

Ответ: 5;4;7.

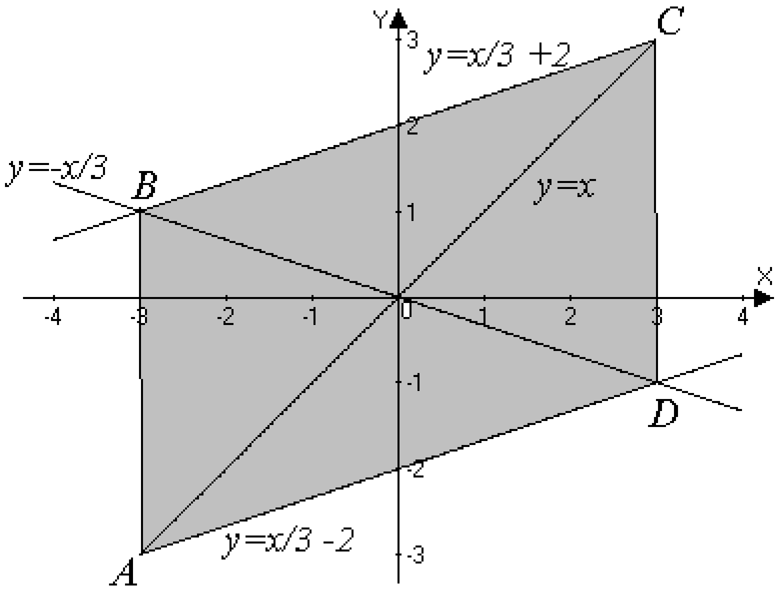
Задача 4. *Найти функцию, удовлетворяющую уравнению* $f(x)+2f\left(\dfrac{1}{x}\right)=x$.

Решение. В соответствии с накладываемым на функцию условием, запишем систему $\begin{cases} f(x)+2f\left(\dfrac{1}{x}\right)=x \\ f\left(\dfrac{1}{x}\right)+2f(x)=\dfrac{1}{x} \end{cases}$. Умножив второе уравнение на 2 и вычитая затем из второго уравнения первое, получим $f(x)=\dfrac{2-x^2}{3x}$.

Ответ: $f(x)=\dfrac{2-x^2}{3x}$.

Задача 5. *Найти площадь фигуры, заданной на координатной плоскости неравенством* $3|y-x|+|3y+x|\le 12$.

Решение.



После раскрытия модулей область, заданная неравенством $|y-x|+\left|y+\dfrac{1}{3}x\right|\le 4$ представляет собой параллелограмм $ABCD$. Основание параллелограмма $CD=4$, высота 6. Отсюда его площадь 24.

Ответ: 24.

Задача 6. *Найти все значения параметра a, при которых в решении неравенства* $x^2-4ax+2x+8a^2-2\le 0$ *содержится хотя бы одно целое число. Какое наибольшее количество целых чисел может содержаться в решении данного неравенства?*

Решение. Рассмотрим функцию $y=x^2-4ax+2x+8a^2-2$. Найдем линию вершин этой параболы. Имеем $x_в=2a-1$, $y_в=4a^2+4a-3$, следовательно, $y_в=x_в^2+4x_в$. Неравенство $x^2-4ax+2x+8a^2-2\le 0$ имеет решение тогда и только тогда, когда $y_в\le 0$, т. е. $x_в\in[-4;0]$, откуда $a\in\left[-\dfrac{3}{2};\dfrac{1}{2}\right]$. Покажем, что при этих значениях параметра в решении неравенства содержится хотя бы одно целое число. Подставим $x=0$ в исходное неравенство, получим $a\in\left[-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right]$. Подставим

$x=-4$ в исходное неравенство, получим $a\in\left[-\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right]$. Значит, при $a\in\left[-\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right]$ или целое число 0, или целое число -4 содержится в решении данного неравенства.

Так как наибольшее количество целых чисел может содержаться в решении данного неравенства при $y_{в\ наим}=-4$, то легко видеть, что целых чисел будет 5.

Ответ: при $a\in\left[-\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right]$. Наибольшее количество целых чисел равно 5.

Задача 7. *Решить уравнение* $\sqrt[5]{x}(\sqrt{5}+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt{3})+3x(\sqrt{5}+9x^2+\sqrt{3})=0$

Решение. Рассмотрим функцию $f(x)=x(\sqrt{5}+x^2+\sqrt{3})$. Она является нечетной и возрастающей. Уравнение можно записать в виде: $f(\sqrt[5]{x})+f(3x)=0$. В соответствии со свойствами этой функции должно выполняться равенство $-\sqrt[5]{x}=3x$. Отсюда $x=0$.

Ответ: $x=0$.

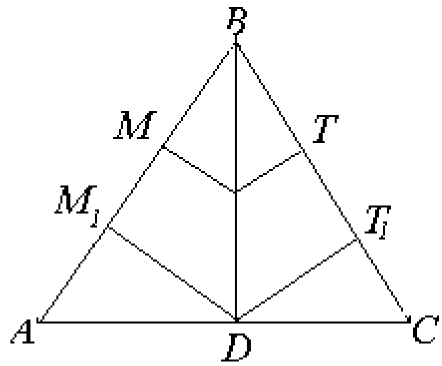
Задача 8. *Площадь треугольника* ABC *равна 24,* $AB:BC=5:3$*, расстояние от середины биссектрисы* BD *до стороны* AB *равно* $\frac{3}{2}$*. Найти* BC.

Решение. Из середины O биссектрисы BD и из точки D опустим перпендикуляры на стороны угла ABC.

Тогда:

а) $OM=OT=\frac{3}{2}$ - по условию,

б) $DM_1=DT_1=2\cdot OM=2\cdot\frac{3}{2}=3$ - из подобия треугольников DM_1B, OMB с коэффициентом подобия $k=\frac{DB}{OB}=2$. По условию $\frac{AB}{BC}=\frac{5}{3}$. Значит, $AB=5n,$. $BC=3n, n>0$. Искомую величину $BC=3n$ найдем через площади:

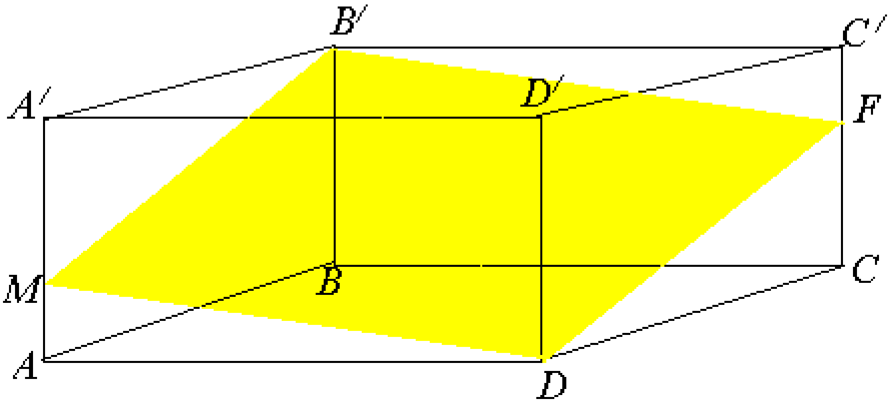


$S_{\triangle BDA}+S_{\triangle BDC}=S_{\triangle ABC}$, $\frac{1}{2}AB\cdot DM_1+\frac{1}{2}BC\cdot DT_1=24$, $\frac{1}{2}5n\cdot 3+\frac{1}{2}3n\cdot 3=24\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow BC=3\cdot 2=6$.

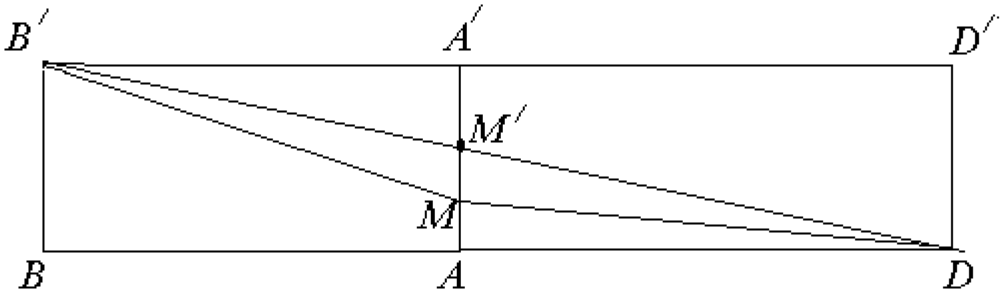
Ответ: 6.

Задача 9. *В прямоугольном параллелепипеде* $ABCDA'B'C'D'$ *с ребрами* $AB=3, AD=7, AA'=5\sqrt{2}$ *через диагональ* BD' *проведена плоскость, пересекающая* *ребро* AA' *так, что сечение параллелепипеда этой плоскостью имеет наименьший периметр. Найти этот периметр.*

Решение. Сечение параллелепипеда - параллелограмм $DMB'F$.

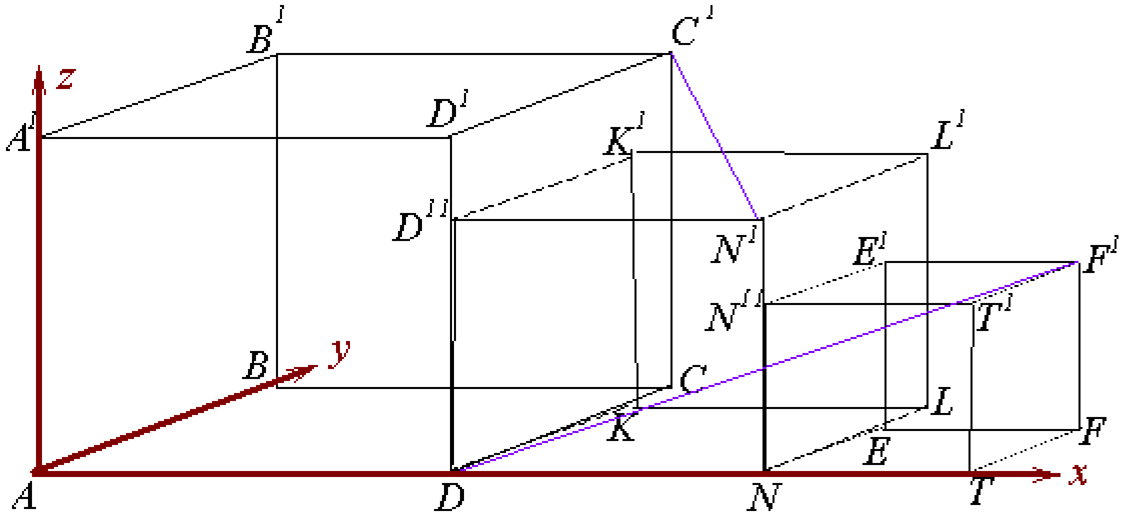


Сделаем развертку граней $ABB'A'$ и $ADD'A'$. Видно, что длина $B'M+MD$ будет наименьшей, когда $M \equiv M' \in (B'D)$. $\Delta DAM'$ подобен $\Delta B'A'M'$. поэтому $\frac{DM'}{M'B'}=\frac{AD}{A'B'}=\frac{7}{3}$, $B'D=\sqrt{50+100}=5\sqrt{6}$. Отсюда $P_{наим}=10\sqrt{6}$.



Ответ: $P_{наим}=10\sqrt{6}$.

Задача 10. *Три куба* $ABCDA'B'C'D'$ *с ребром* a, $DKLND''K'L'N'$ *с ребром* b *и* $NEFTN''E'F'Y'$ *с ребром* c *совмещены гранями так, что* $K\in(DC)$, $D''\in(DD')$, $E\in(LN)$, $N''\in(NN')$. *Числа* a,b,c *образуют геометрическую прогрессию. Найти знаменатель этой прогрессии, если* $(C'N')\perp(DF')$.



Решение. Не нарушая общности рассуждений, примем $a=1$. Тогда $b=q, c=q^2$. В соответствии с рис. введем координаты точек $C^{/}(1;1;1)$, $N^{/}(1+q;0;q)$, $D(1;0;0)$, $F^{/}(1+q+q^2;q^2;q^2)$. Тогда $\overrightarrow{C^{/}N^{/}}=(q;-1;q-1)$, $\overrightarrow{DF^{/}}=(q+q^2,q^2;q^2)$. Из условия $\overrightarrow{C^{/}N^{/}}\perp\overrightarrow{DF^{/}}$ следует, что $\overrightarrow{C^{/}N^{/}}\cdot\overrightarrow{DF^{/}}=0\Rightarrow q^2+q^3-q^2+q^3-q^2=0\Rightarrow q^2(2q-1)=0,\Rightarrow q=\frac{1}{2}$.

Ответ: $q=\frac{1}{2}$.

Решение задач 2 варианта (10 класс)

Задача 1. *Решить уравнение* $x(x+2)(x+4)(x+6)=-16$.

Решение. Перемножая в уравнении средние скобки и первую скобку с последней, получаем, что $(x^2+6x+8)(x^2+6x)=-16$. При замене $t=x^2+6x$ имеем уравнение $(t+8)t=-16$, корнем которого является число -4. Возвращаясь к переменной *x* получаем $x=-3\pm\sqrt{5}$.

Ответ: $x=-3\pm\sqrt{5}$.

Задача 2. *Пусть* $a=\sqrt{2012}-\sqrt{2013}$. *Вычислить* $a^2+\frac{1}{a^2}$.

Решение.

$$a^2+\frac{1}{a^2}=\left(a+\frac{1}{a}\right)^2-2=\left(\sqrt{2012}-\sqrt{2013}+\frac{1}{\sqrt{2012}-\sqrt{2013}}\right)^2-2=$$

$$=\left(\sqrt{2012}-\sqrt{2013}+\frac{\sqrt{2012}-\sqrt{2013}}{-1}\right)^2-2=\left(-2\sqrt{2013}\right)^2-2=8050.$$

Ответ: 8050.

Задача 2. *В командных соревнованиях для получения одного призового места необходимо набрать n очков. В составе каждой команды 3 игрока. У одной из команд сумма набранных очков оказалась меньше n. Если бы 1-й игрок этой команды имел вдвое больше очков, то командная сумма составила бы* $2n-34$ *очков. С другой стороны, если бы 3-му игроку добавили бы вдвое больше очков, чем у него было, то та же сумма составила бы* $2n+6$ *очков. Найти n, если известно, что 2-й игрок этой команды имел на 9 очков больше, чем 1-й.*

Решение. Обозначим наличие очков у 1-го игрока x, у второго - y, у третьего z. Тогда из условия задачи вытекает: $x+y+z<n,\ y=x+9\Rightarrow\begin{cases}2x+z+9<n\\3x+9+z=2n-34\\2x+9+3z=2n+6\end{cases}$

$$\Rightarrow\begin{cases}x<-z+25\\x=2z-40\end{cases}.$$

Учитывая, что $x>0$, приходим к выводу, что $20<z\le 21$. Отсюда $\begin{cases}x=2\\z=21\end{cases}\Rightarrow n=35.$

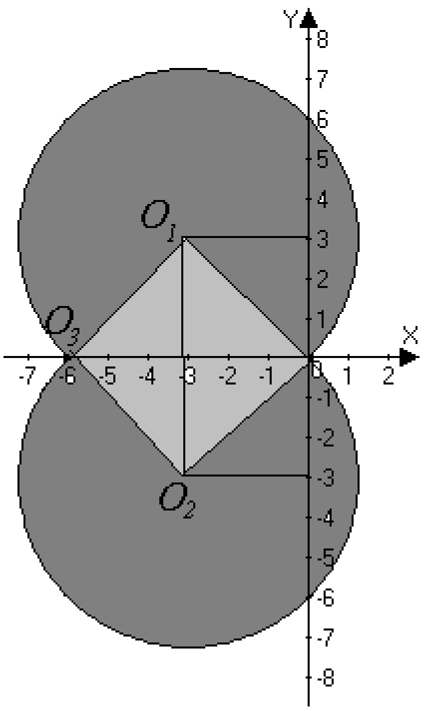
Ответ: $n=35$.

Задача 3. *Найти функцию, удовлетворяющую уравнению* $f(x)-2f\left(\frac{1}{x}\right)=3x$.

Решение. В соответствии с условием составим систему $\begin{cases}f(x)-2f\left(\frac{1}{x}\right)=3x\\f(\frac{1}{x})-2f(x)=\frac{3}{x}\end{cases}$. Умножив второе уравнение на 2 и сложив затем оба уравнения, найдем $f(x)=-x-\frac{2}{x}$.

Ответ: $f(x)=-x-\frac{2}{x}$.

Задача 5. *Найти площадь фигуры, заданной на координатной плоскости неравенством* $x^2+y^2+6(x-|y|)\le 0$.



Решение. После выделения полных квадратов придем к виду:
$(x+3)^2+(|y|-3)^2 \le 18$.
Область на координатной плоскости, заданная этим неравенством изображена на рис. Площадь S заштрихованной фигуры можно вычислить, представив ее в виде:

$$S = 2\cdot\frac{3}{4}\cdot\pi\cdot 18 + S_{oo_1o_2o_3} = 27\pi + (3\sqrt{2})^2 = 27\pi + 18.$$

Ответ: $27\pi + 18$

Задача 6. *Найти все значения параметра а, при которых в решении неравенства* $x^2-4ax-2x+8a^2-4a-4\le 0$ *содержится хотя бы одно целое число. Какое наибольшее количество целых чисел может содержаться в решении этого неравенства?*

Решение. Рассмотрим функцию $y = x^2-4ax-2x+8a^2-4a-4$. Найдем линию вершин этой параболы. Имеем $x_в = 2a+1$, $y_в = 4a^2-8a-5$, следовательно, $y_в = x_в^2 - 6x_в$. Неравенство $x^2-4ax-2x+8a^2-4a-4\le 0$ имеет решение тогда и только тогда, когда $y_в \le 0$, т. е. $x_в \in [0;6]$, откуда $a\in\left[-\frac{1}{2};\frac{5}{2}\right]$. Покажем, что при этих значениях параметра в решении неравенства содержится хотя бы одно целое число. Подставим $x=0$ в исходное неравенство, получим $a\in\left[-\frac{1}{2};1\right]$. Подставим $x=6$ в исходное неравенство, получим $a\in\left[1;\frac{5}{2}\right]$. Значит, при $a\in\left[-\frac{1}{2};\frac{5}{2}\right]$ или целое число 0, или целое число 6 содержится в решении данного неравенства.

Так как наибольшее количество целых чисел может содержаться в решении данного неравенства при $y_{в\ наим} = -9$, то легко видеть, что целых чисел будет 7.

Ответ: при $a\in\left[-\frac{1}{2};\frac{5}{2}\right]$. Наибольшее количество целых чисел равно 7.

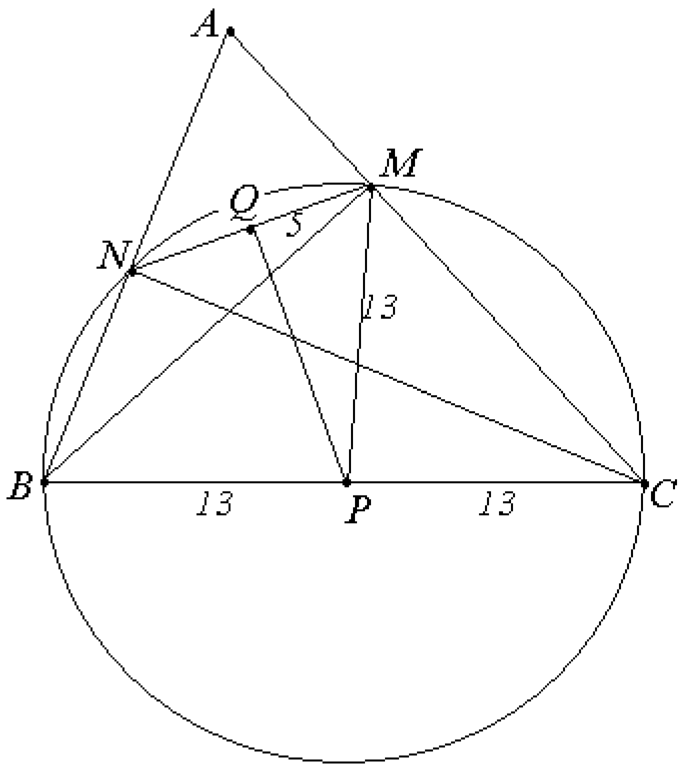
Задача 7. *Решить уравнение* $\sqrt[3]{x}(\sqrt{2}+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt{3})+2x(\sqrt{2}+4x^2+\sqrt{3})=0$

Решение. Рассмотрим функцию $f(x)=x(\sqrt{2}+x^2+\sqrt{3})$. Она является нечетной и возрастающей. Уравнение можно записать в виде:

$\sqrt[3]{x}(\sqrt{2}+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt{3})+2x(\sqrt{2}+4x^2+\sqrt{3})=0 \Rightarrow f(\sqrt[3]{x})+f(2x)=0$. В соответствии со свойствами этой функции должно выполняться равенство $-\sqrt[3]{x}=2x$. Отсюда $x=0$.

Ответ: $x=0$.

Задача 8. *В треугольнике* ABC *проведены высоты* BM, CN, *при этом* $MN=10,\ BC=26$. *Найти расстояние между серединами отрезков* MN *и* BC.



Решение. Пусть P, Q - середины отрезков BC, MN соответственно. Из точек M и N отрезок BC виден под прямым углом, значит, эти точки лежат на окружности с диаметром BC. Точка P - центр окружности, а Q - середина хорды MN, поэтому $PQ \perp MN$. Из прямоугольного треугольника PQM находим, что $PQ=\sqrt{PM^2-QM^2}=\sqrt{13^2-5^2}=12$

Ответ: 12.

Задача 9. *Равносторонний треугольник ABC со стороной 1 служит основанием пирамиды* $SABC$, *а ребро* $SA=2$ *является ее высотой. Провести через ребро* SB *плоскость так, чтобы получить в сечении пирамиды треугольник с наименьшим периметром. Найти этот периметр.*

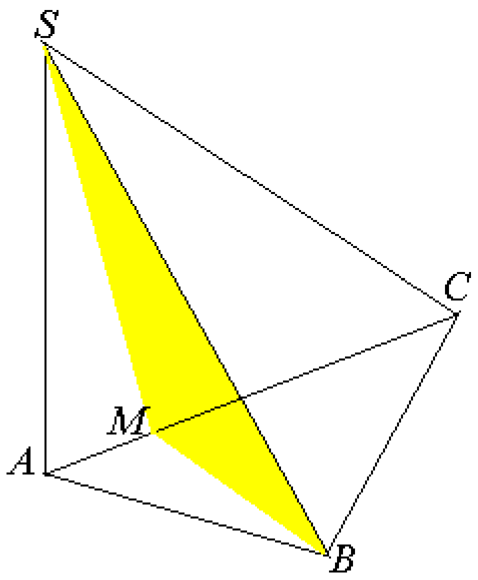
Решение. $AB=BC=CA=1,\quad SA=3, P_{\Delta SBM}=SB+BM+SM.$ Сделаем развертку граней SFC и ABC.

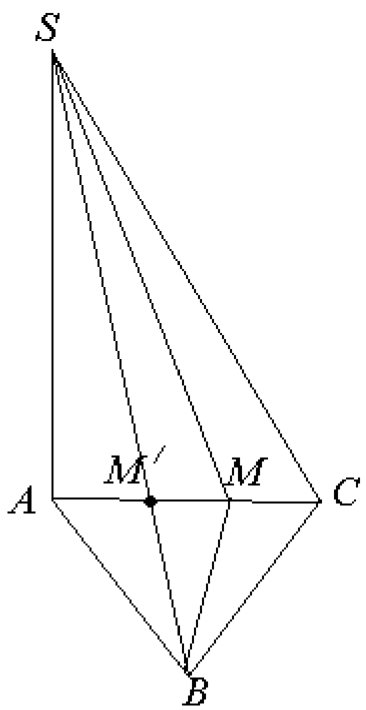
Наименьшее значение периметра сечения достигается, когда $M \equiv M' \Rightarrow M \in (SB)$. Из

$\Delta SAB \Rightarrow SB=\sqrt{5}$. Из $\Delta SDB \Rightarrow SM+BM = =\sqrt{\frac{1}{4}+(2+\frac{\sqrt{3}}{2})^2}=\sqrt{5+2\sqrt{3}}$.

Тогда $P_{наим}=\sqrt{5}+\sqrt{5+2\sqrt{3}}$.

Ответ: $P_{наим}=\sqrt{5}+\sqrt{5+2\sqrt{3}}$.





Задача 10. *Два куба* $ABCDA_1B_1C_1D_1$ *и* $DKLND_2K_1L_1N_1$ *совмещены гранями так, что вершина* D_2 *второго куба лежит на ребре* DD_1*, вершина* K *на ребре* DC *первого куба. Тангенс угла* φ *между прямыми* B_1N_1 *и* AD_2 *равен* $\frac{3}{\sqrt{5}}$*. Найти соотношение между ребрами кубов.*

Решение. Примем длину ребра большого куба за 1, малого куба за a.

Введем систему координат, как показано на рис.

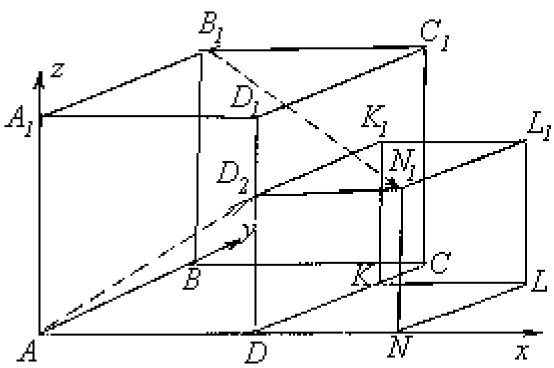


Рис.

$\overrightarrow{AD_2} = (1;0;a)$, $B_1(0;1;1)$, $N_1(1+a;0;a)$

$\Rightarrow \overrightarrow{B_1N_1} = (1+a;-1;a-1)$

$$\Rightarrow \cos\varphi = \frac{\left|\overrightarrow{AD_2} \cdot \overrightarrow{B_1N_1}\right|}{\left|\overrightarrow{AD_2}\right| \cdot \left|\overrightarrow{B_1N_1}\right|} = \frac{1+a+a^2-a}{\sqrt{a^2+1} \cdot \sqrt{2a^2+3}}$$

$$= \sqrt{\frac{a^2+1}{2a^2+3}}.$$

Из основного тригонометрического тождества вытекает, что $tg^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} - 1 \Rightarrow \frac{9}{5} = \frac{a^2+2}{a^2+1} \Rightarrow a = \frac{1}{2}$. Таким образом, отношение ребер кубов составляет 1:2.

Ответ: 1:2.

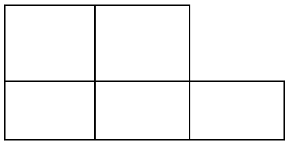
ВАРИАНТ 1 (9 класс).

1. Известно, что p и q – простые числа, такие, что $(p^2 + 1)$ делится на q, а $(q^2 - 1)$ делится на p. Докажите, что $(p + q + 1)$ – составное число.

2. В ромбе *ABCD* на сторонах *AB* и *BC* взяты, соответственно, точки *E* и *F*, такие, что *CF*/*BF* = *BE*/*AE* = 2012. Оказалось, что *DE* = *DF*. Найдите величину угла *BAD*.

3. В прямоугольном треугольнике с катетами 3 и 4 см проведены высота прямого угла и медиана большего из острых углов. В каком отношении высота делит медиану?

4. Прямоугольник, стороны которого выражаются целыми числами, можно разрезать на фигурки вида, изображенного на рисунке (сторона клетки равна единице). Докажите, что его можно разрезать на прямоугольники 1 × 5.



5. Одна руда содержит 72% железа и 28% пустой породы, а другая – 56% железа и 44% пустой породы. Сколько нужно взять первой и второй руды, чтобы получить 10т руды с содержанием железа 60%?

6. Решите неравенство $\left|\dfrac{x^3+8}{x^2-2x+4}\right| < 0,4\cdot 2\dfrac{1}{2}\cdot tg45^\circ + 5|x|^0 - \dfrac{x^{-2012}}{x^{-2013}}$.

7. Известно, что график функции $y=(x-2)\left(x^2-3a^2x-2x+2a^4+3a^2+1\right)$ пересекает оси координат ровно в трёх точках. Найти площадь треугольника с вершинами в этих точках.

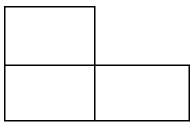
ВАРИАНТ 2 (9 класс)

1. Докажите, что если *a*, *b*, *c* - нечётные числа, то хотя бы одно из чисел $ab-1$, $bc-1$ или $ac-1$ делится на 4.

2. В ромбе *ABCD* на сторонах *AB* и *BC* взяты, соответственно, точки *E* и *F*, такие, что *CF*/*BF* = *BE*/*AE* = 2013. Оказалось, что *DE* = *DF*. Найдите величину угла *ABC*.

3. В прямоугольном треугольнике высота, опущенная на гипотенузу, делит ее на отрезки, разность которых равна одному из катетов треугольника. Найти углы треугольника.

4. Прямоугольник, стороны которого выражаются целыми числами, можно разрезать на фигурки вида, изображенного на рисунке (сторона клетки равна единице). Докажите, что его можно разрезать на прямоугольники 1 × 3.



5. Имеется 5 литров 70%-го раствора серной кислоты. Сколько литров 80%-го раствора серной кислоты нужно долить в этот раствор, чтобы получился 72%-й раствор серной кислоты?

6. Решите неравенство $\sqrt{x^2-\dfrac{6x^2}{|x|}+\dfrac{3}{\left(tg30^\circ\right)^2}} > \dfrac{1}{2}\left(\sin 30^\circ\right)^2$.

7. Известно, что график функции $y=(x-4)\left(x^2-3a^2x-3x+2a^4+5a^2+2\right)$ пересекает оси координат ровно в трёх точках. Найти площадь треугольника с вершинами в этих точках.

Задание	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**Итого**
Баллы	12	12	12	16	16	16	16	**100**

Общие критерии оценивания заданий олимпиады:

$+$ - полное обоснованное решение задачи.

$\pm$ - арифметическая ошибка в конце решения задачи; ошибка при выписывании ответа.

$\frac{1}{2}$ - получены существенные промежуточные результаты.

$\mp$ - получены некоторые промежуточные результаты; арифметическая ошибка допущена вначале решения, которая, при правильном ходе решения задачи, возможно, привела к неверному ответу.

$-$ - решение задачи неверно.

«нет»- решение задачи отсутствует.

Решение задач 9 класса

Задача 1. Вариант 1.

p и q – простые числа, такие, что $(p^2 + 1)$ делится на q, а $(q^2 – 1)$ делится на p. Докажите, что $(p + q + 1)$ – составное число.

Решение: Так как $(q + 1)(q – 1)$ делится на p, то одно из чисел $q + 1$ или $q – 1$ делится на p. Если $q + 1$ делится на p, то и $p + q + 1$ делится на p. Если же $q – 1$ делится на p, то $q = kp + 1$ для некоторого натурального $k \le p$. По условию, $p^2 + 1$ делится на q, значит, $p^2 + 1 – q = p^2 – kp = p(p – k)$ делится на q, значит, $p – k$ делится на q. Следовательно, $k = p$ (иначе $0 < p – k < q$), то есть $q = p^2 + 1$. Но тогда $p + q + 1 = p^2 + p + 2$ – четное число, большее двух.

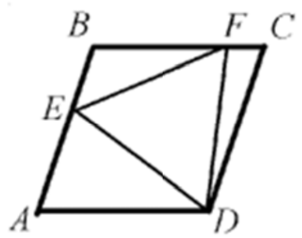
Задача 1. Вариант 2.

Докажите, что если ***a***, ***b***, ***c*** - нечётные числа, то хотя бы одно из чисел ***ab*- 1**, ***bc* - 1** или ***ac* - 1** делится на **4**.

Решение: Остаток от деления нечетного числа на 4 может быть либо 3, либо 1. Если среди чисел *a*, *b*, *c* есть хотя бы два числа, остатки от деления которых на 4 равны 1, то их произведение при делении на 4 также даёт остаток 1. Следовательно, разность этого произведения и единицы делится на 4, ч. т. д.
В противном случае, среди данных найдутся хотя бы два числа, остатки от деления которых на 4 равны 3. Так как $(4m + 3)*(4n+ 3) - 1 = 16mn + 12m+ 12n + 8 = 4(4mn + 3m + 3n + 2)$, то разность произведения этих чисел и единицы делится на 4, ч. т. д.

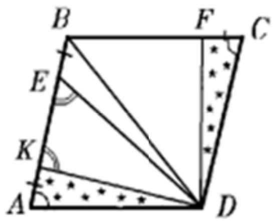
Задача 2.

В ромбе ABCD на сторонах AB и BC взяты, соответственно, точки E и F, такие, что CF/BF = BE/AE = 2012 [2013]. Оказалось, что DE = DF. Найдите величину угла BAD[ABC].



Решение: Ответы: в первом варианте – 60, во втором – 120.

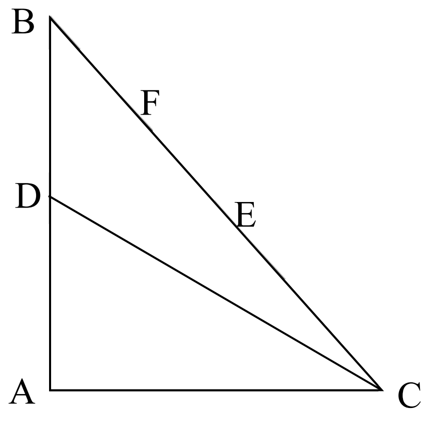
Из условия задачи (в обоих вариантах) следует, что BE = CF. Отложим на стороне AB отрезок AK, равный BE. Треугольники ADK и CDF равны по двум сторонам и углу (AD = CD, AK = CF, $\angle$ DAK = $\angle$ DCF). Значит, DK = DF = DE, то есть треугольник DKE – равнобедренный. В частности, равны углы DKE и DEK при его основании. Следовательно, треугольники ADK и BDE равны (по двум сторонам и углу: AK = BE, DK = DE, $\angle$ DKA = $\angle$ DEB). Отсюда AD = BD, то есть треугольник ABD – равносторонний. Следовательно, $\angle$ BAD = 60, $\angle$ ABC = 120.



Задача 3. Вариант 1.

В прямоугольном треугольнике с катетами 3 и 4 см проведены высота прямого угла и медиана большего из острых углов. В каком отношении высота делит медиану?

Ответ: 9:8, считая от основания.



Решение. Проведем отрезок DF, параллельный высоте AE. По теореме Фалеса, он разделит отрезок BE пополам. По теореме Пифагора, гипотенуза треугольника ABC равна 5 см. Кроме этого $AE^2 = BE \cdot EC$, и $AE \cdot BC = AB \cdot AC$. Отсюда: $AE = 2{,}4, \quad 2{,}4^2 = x \cdot (5 - x)$. Отсюда $x = 3{,}2$. То есть BE=3,2, FE=1,6, EC=1,8. Из параллельности отрезков DF и GE следует, что $\frac{CG}{GD} = \frac{CE}{EF} = \frac{1{,}8}{1{,}6} = 9:8$.

Задача 3. Вариант 2.

В прямоугольном треугольнике высота, опущенная на гипотенузу, делит ее на отрезки, разность которых равна одному из катетов треугольника. Найти углы треугольника.

Решение: Пусть ABC прямоугольный треугольник с прямым углом B и BH высота. На отрезке HC отметим точку K с $AH = HK$. Из условия задачи следует, что $KC = AB = BK$. Поэтому $\angle BAC = \angle AKB = 2\angle ACB$. Отсюда находим, что $\angle ACB = 30°, \quad \angle BAC = 60°$.

Задача 4.

Прямоугольник, стороны которого выражаются целыми числами, можно

разрезать на фигурки вида  [] (сторона клетки на рисунке равна единице). Докажите, что его можно разрезать на прямоугольники 1 × 5 [1 × 3].

Решение: Площадь данного прямоугольника делится нацело на площадь указанной фигурки, то есть на 5 [3]. Площадь прямоугольника равна произведению длин сторон. Поскольку длины сторон – целые числа, а 5 [3] – простое число, то длина одной из сторон должна делится на 5 [3]. Разделим эту сторону и противоположную ей на отрезки длины 5 [3], а две другие стороны – на отрезки длины 1, после чего соединим соответствующие точки на противоположных сторонах прямыми линиями.

Задача 5. Вариант 1.

0,72x + (10 – x)*0,56 = 6 **Ответ**: 2,5 т и 7,5 т

Задача 5. Вариант 2.

3,5 + 0,8x = 3,6 + 0,72x **Ответ**: 1,25л

Задача 6. Вариант 1.

Решите неравенство: $\left|\dfrac{x^3+8}{x^2-2x+4}\right| < 0,4\cdot 2\dfrac{1}{2}\cdot tg45^\circ + 5|x|^0 - \dfrac{x^{-2012}}{x^{-2013}}.$

Решение: $x \neq 0$.

$|x+2| < \frac{0,4\cdot 5}{2} + 5 - x; \quad \Leftrightarrow \quad |x+2| < 1 + 5 - x; \quad \Leftrightarrow \quad |x+2| < 6 - x;$

$\begin{cases} x+2 < 6-x; \\ x+2 > x-6; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 2; \\ 2 < -6 \end{cases} \Leftrightarrow x\epsilon(-\infty; 0) \cup (0; 2).$

Ответ: x $\epsilon(-\infty; 0) \cup (0; 2)$.

Задача 6. Вариант 2.

Решите неравенство: $\sqrt{x^2 - \dfrac{6x^2}{|x|} + \dfrac{3}{\left(tg30^\circ\right)^2}} > \dfrac{1}{2}\left(\sin 30^\circ\right)^2.$

Решение: $x \neq 0$. Замена: $|x|$=t> 0,

$$\sqrt{t^2-6t+9} > \frac{1}{8} \Leftrightarrow |t-3| > \frac{1}{8} \Leftrightarrow t-3 > \frac{1}{8}, t-3 < -\frac{1}{8} \Leftrightarrow t > 3\frac{1}{8}, t < 2\frac{7}{8}$$

Обратная замена: t=$|x|$ $\Leftrightarrow$ **Ответ:** $x\epsilon\left(-\infty; -3\frac{1}{8}\right) \cup \left(-2\frac{7}{8}; 0\right) \cup \left(0; 2\frac{7}{8}\right) \cup \left(3\frac{1}{8}; +\infty\right)$.

Задача 7. Вариант 1.

Известно, что график функции $y=(x-2)\left(x^2-3a^2x-2x+2a^4+3a^2+1\right)$ пересекает оси координат ровно в трёх точках. Найти площадь треугольника с вершинами в этих точках.

Решение: Для данной функции имеем $y(0)=-2\left(2a^4+3a^2+1\right)$. Найдем нули данной функции: $\left[\begin{array}{l} x_1=2 \\ x^2-3a^2x-2x+2a^4+3a^2+1=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=2 \\ x_2=2a^2+1. \\ x_3=a^2+1 \end{array}\right.$

График функции пересекает оси координат ровно в трёх точках, следовательно, должны совпадать два из трех нулей функции. Получаем три случая:

$$x_1=x_2=2 \Leftrightarrow 2=2a^2+1 \Leftrightarrow a^2=\frac{1}{2} \Rightarrow x_3=\frac{3}{2}, y(0)=-6 \Rightarrow S=\frac{3}{2};$$

$$x_1=x_3=2 \Leftrightarrow 2=a^2+1 \Leftrightarrow a^2=1 \Rightarrow x_2=3, y(0)=-12 \Rightarrow S=6;$$

$$x_2=x_3 \Leftrightarrow a^2+1=2a^2+1 \Leftrightarrow a=0 \Rightarrow x_{2,3}=1, y(0)=-2 \Rightarrow S=1.$$

Ответ: 1 или 1,5 или 6.

Задача 6. Вариант 2

Известно, что график функции $y=(x-4)\left(x^2-3a^2x-3x+2a^4+5a^2+2\right)$ пересекает оси координат ровно в трёх точках. Найти площадь треугольника с вершинами в этих точках.

Решение: Для данной функции имеем $y(0)=-4\left(2a^4+5a^2+2\right)$. Найдем нули данной функции: $\left[\begin{array}{l} x_1=4 \\ x^2-3a^2x-3x+2a^4+5a^2+2=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=4 \\ x_2=2a^2+1. \\ x_3=a^2+2 \end{array}\right.$

График функции пересекает оси координат ровно в трёх точках, следовательно, должны совпадать два из трех нулей функции. Получаем три случая:

$$x_1=x_2=4 \Leftrightarrow 4=2a^2+1 \Leftrightarrow a^2=\frac{3}{2} \Rightarrow x_3=\frac{7}{2}, y(0)=-56 \Rightarrow S=14;$$

$$x_1=x_3=4 \Leftrightarrow 4=a^2+2 \Leftrightarrow a^2=2 \Rightarrow x_2=5, y(0)=-80 \Rightarrow S=40;$$

$$x_2 = x_3 \Leftrightarrow a^2 + 2 = 2a^2 + 1 \Leftrightarrow a = 1 \Rightarrow x_{2,3} = 3, y(0) = -36 \Rightarrow S = 18.$$

Ответ: 14 или 18 или 40.

ВАРИАНТ 1 (8 класс)

1. Известно, что $a^2 + b^2 = 1 + ab$. Доказать, что $a^3 - b = a - b^3$.

2. После того, как Вася съел половину ягод из банки, уровень компота понизился на одну треть. На какую часть (от нового уровня) понизится уровень компота, если съесть половину оставшихся ягод?

3. Доказать, что сумма чисел $5^1+5^2+5^3+\ldots+5^{2013}$ делится на 31.

4. Один из углов треугольника равен 76 градусов. Найти угол между биссектрисами двух других углов.

5. Грани куба можно окрасить либо в красный цвет, либо в зеленый, либо некоторые в красный, а некоторые в зеленый. Сколько существует разных способов окраски? (Два куба считаем окрашенными различно, если их нельзя перепутать, как не вращай).

6. Построить квадрат по сумме его диагонали и стороны.

7. Через точку, взятую на стороне треугольника, проведены две прямые параллельные двум другим сторонам треугольника. Эти прямые разбивают данный треугольник на три части – параллелограмм и два треугольника. Площади треугольников равны S_1 и S_2. Найти площадь параллелограмма.

ВАРИАНТ 2

1. Известно, что $a^2 + b^2 = 1 - ab$. Доказать, что $a^3 + b = b^3 + a$.

2. После того, как Коля съел одну треть ягод из банки, уровень компота понизился на одну четверть. На какую часть (от нового уровня) понизится уровень компота, если съесть треть оставшихся ягод?

2. Доказать, что сумма чисел $3^1+3^2+3^3+\ldots+3^{2013}$ делится на 13.

4. В треугольнике *ABC* биссектрисы *AL* и *CK* пересекаются под углом 57 градусов. Найти величину угла *B*.

5. При приготовлении бутерброда к начинке можно добавить один или несколько разных компонентов из набора: перец, лук, грибы, помидоры, кетчуп, огурцы. Сколько разных видов бутербродов можно приготовить?

6. Построить прямоугольник по диагонали и периметру.

7. Через точку M взятую на стороне AB треугольника ABC проведены две прямые параллельные двум другим сторонам треугольника и пересекающие сторону BC в точке L, а сторону AC в точке K. Известно, что $S_\Delta\, AMK = S_1$, $S_\Delta\, KLC = S_2$. Найти $S_\Delta\, MBL$.

Задание	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**Итого**
Баллы	12	12	12	12	12	20	20	**100**

Общие критерии оценивания заданий олимпиады:

$+$ - полное обоснованное решение задачи.

$\pm$ - арифметическая ошибка в конце решения задачи; ошибка при выписывании ответа.

$\frac{1}{2}$ - получены существенные промежуточные результаты.

$\mp$ - получены некоторые промежуточные результаты; арифметическая ошибка допущена вначале решения, которая, при правильном ходе решения задачи, возможно, привела к неверному ответу.

$-$ - решение задачи неверно.

«нет»- решение задачи отсутствует.

Решение задач 8 класса

Вариант 1.

1.$b^2 + a^2 = 1 + ab$; $a^2 - ab + b^2 = 1$;
$(a+b)(a^2 - ab + b^2) = (a+b)$; $a^3 + b^3 = a + b$;
$a^3 - b = a - b^3$. Ч.т.д.

2.Половина ягод занимала $\frac{1}{3}$ банки. Половина оставшихся ягод составит $\frac{1}{6}$ банки. От нового уровня $\left(\frac{2}{3}\text{ банки}\right)$ $\frac{1}{6}$ банки составит $\frac{1}{4}$ часть.

Ответ:1/4.

3.$5^1 + 5^2 + 5^3 + \cdots .. + 5^{2013} = 5(1 + 5 + 5^2) + 5^4(1 + 5 + 5^2) + \cdots .. + 5^{2011}(1 + 5 + 5^2) = 31(5 + 5^4 + \cdots . + 5^{2011})$

4. $2\alpha + 2\beta + 76^\circ = 180^\circ$, значит, $\alpha + \beta = 52^\circ$. Откуда получаем, что $180^\circ - 52^\circ = \gamma = 122^\circ$.

7°

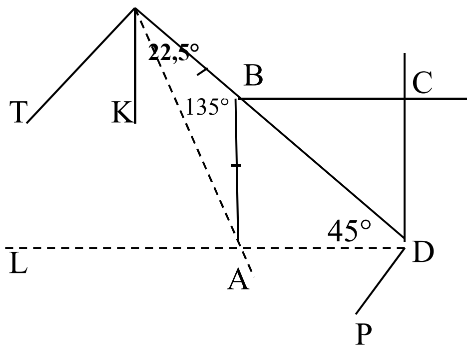
По определению угол между прямыми – острый.

Ответ 52^0.

5.Два случая, когда куб целиком красный или зеленый. Два случая, когла закрашена одна грань противоположного цвета. В случае, когда закрашены две грани противоположного цвета эти две грани могут быть противоположны друг другу или соседствовать. Получаем еще 4 случая. Когда закрашены три грани протвоположного цвета, они или примыкают к одному углу, или граничат только одной стороной. Всего 10 закрашиваний куба. Ответ: 10.

M

6. Дано: отрезок, равный $a+d$.

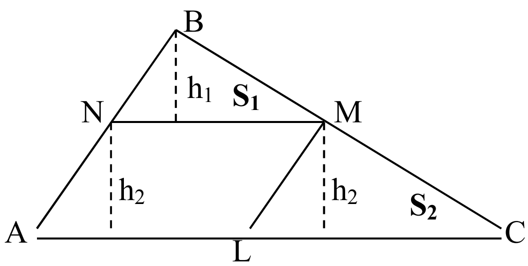


Построение:

1. Строим отрезок MD, равный $a+d$. 2. В точках M и D проведём перпендикуляры MT и DP к прямой MD. 3. Строим биссектрису DL прямого угла MDP. 4. Строим биссектрису MK прямого угла TMD, затем биссектрису угла KMD, которая составляет с прямой MD угол в 22,5° . На пересечении этой биссектрисы с прямой DL отметим точку A. 5. В точке A проведем перпендикуляр к прямой AD, и на пересечении с прямой MD отметим точку B. 6. В точках B и D проведем перпендикуляры к прямым AB и AD, соответственно, и на их пересечении отметим точку C. Квадрат ABCD-искомый.

7. Через точку M, взятую на стороне BC треугольника ABC проведем прямые MN и ML, параллельные сторонам AC и AB, соответственно. Пусть $S_{NBM} = S_1$, $S_{LMC} = S_2$. Обозначим h_1 высоту треугольника NBM , h_2 треугольника LMC и параллелограмма ANML.Из подобия треугольников NBM и LMC имеем $\dfrac{h_1}{h_2} = \sqrt{\dfrac{S_1}{S_2}}$, откуда $h_1 = \sqrt{\dfrac{S_1}{S_2}} h_2$. Так как площадь треугольника $S_1 = \dfrac{1}{2} MN \cdot h_1$, то $S_1 = \dfrac{1}{2} MN \cdot \sqrt{\dfrac{S_1}{S_2}} h_2$, откуда

$$MN \cdot h_2 = S_{ANML} = \frac{2S_1 \cdot \sqrt{S_2}}{\sqrt{S_1}} = 2\sqrt{S_1 S_2}$$. Ответ: $S = 2\sqrt{S_1 S_2}$.



Вариант 2.

1. $b^2 + a^2 = 1 - ab;\ a^2 + ab + b^2 = 1;$

$(a-b)(a^2 + ab + b^2) = (a-b);\ a^3 - b^3 = a - b;$

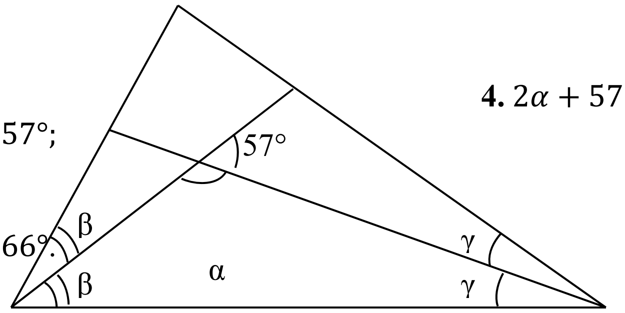
$a^3 + b = a + b^3$. Ч.т.д.

2. Одна треть ягод занимала $\frac{1}{4}$ банки. Одна треть оставшихся ягод составит $\frac{2}{3}\frac{1}{4} = \frac{1}{6}$ банки. От нового уровня $\left(\frac{3}{4}\text{ банки}\right)$ $\frac{1}{6}$ банки составит $\frac{2}{9}$.

Ответ: 2/9.

3. $3^1 + 3^2 + 3^3 + \cdots .. + 3^{2013} = 3(1 + 3 + 3^2) + 3^4(1 + 3 + 3^2) + \cdots .. + 3^{2011}(1 + 3 + 3^2) =$

$= 13(3 + 3^4 + \cdots . + 3^{2011})$. Ч. т. д.



4. $2\alpha + 57 \cdot 2 = 360°;\ \alpha = 123; \beta + \gamma = 180° - \alpha =$ 57°;

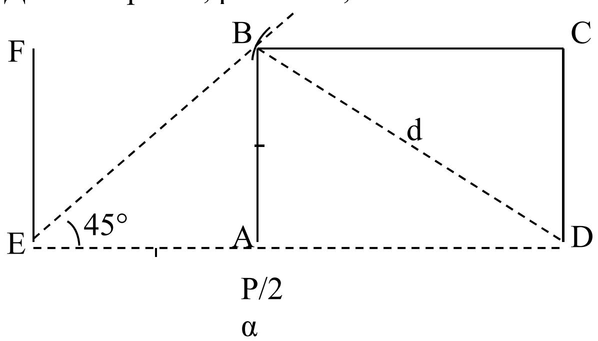
$2 \cdot (\beta + \gamma) = 114°;\ \angle B = 180° - 114° =$ 66°.

Ответ: 66^0.

5. Мы можем выбрать все 6 приправ, 5 приправ,4,3,2,1 соответственно

$1 + C_6^5 + C_6^4 + C_6^3 + C_6^2 + 6 = 1 + 6 + 15 + 20 + 15 + 6 = 63$ способами. Ответ: 63 способа.

6. Дано: Отрезки, равные P, d.



Построение: 1. Разделим отрезок P пополам. 2. Построим ED=P/2. 3. В точке E восстановим перпендикуляр EF. 4. Построим биссектрису прямого угла DEF. 5. Проведем окружность с центром в точке D и радиусом d, точку пересечения окружности с биссектрисой угла DEF обозначим B. 6.Из точки B проведем перпендикуляр к прямой ED, на пересечении с ED отметим точку A. 7. В точках D и B проведем перпендикуляры к прямым AD и AB, соответственно, на пересечении перпендикуляров отметим точку C. ABCD- искомый прямоугольник.

7. Так как площадь параллелограмма $S_{KMLC} = 2S_2$, то из решения задачи 7 варианта 1 следует, что $2S_2 = 2\sqrt{S_1 \cdot S_{MBL}}$, откуда $S_{MBL} = \frac{S_2^2}{S_1}$. Ответ: $S_{MBL} = \frac{S_2^2}{S_1}$.