Первый (отборочный) этап академического соревнования

Олимпиады школьников «Шаг в будущее» по образовательному предмету «Математика», осень 2013 г.

Вариант № 7

1. Из пунктов A и B одновременно выехали навстречу друг другу два велосипедиста. Когда первый проехал половину пути, второму осталось проехать до пункта A 72 км, а когда второй проехал половину пути, первому осталось проехать до пункта B 45 км. На каком расстоянии от пункта A велосипедисты встретились? (8 баллов)

2. Решите уравнение $3^{1+\sqrt{x}}+3^{2-\sqrt{x}}=28$. (8 баллов)

3. Какое наименьшее значение может принять сумма первых n членов арифметической прогрессии $\left(a_n\right)$, если $a_{35}=2,\ a_{40}=17$? (8 баллов)

4. Найдите все целочисленные решения системы

$$\begin{cases} \sqrt{2}\sin\dfrac{\pi(y+4)}{8}=\sqrt{2\sin^2\dfrac{\pi x}{8}-2\sin^2\dfrac{\pi y}{8}\cos\dfrac{\pi x}{4}+2\cos\dfrac{\pi x}{4}}, \\ |x|+|y-4|\le 4, \quad y<x+2. \end{cases}$$

(8 баллов)

5. Решите неравенство $\dfrac{|x+1|-\sqrt{3x+7}}{\sqrt{4-2x}-\sqrt{x^2+x}}\ge 0.$ (10 баллов)

6. Найдите множество значений функции $f(x)=g(g^2(x))$, где $g(x)=3/\left(|x-2|+1\right)$.

(10 баллов)

7. В прямоугольную трапецию $ABCD$ с углом A, равным $2\arccos\left(15/17\right)$, вписана окружность. Вторая окружность с радиусом $18/25$ касается сторон AB и AD трапеции и вписанной в нее окружности. Найдите площадь треугольника ABD. (12 баллов)

8. Составьте уравнение общей касательной к графикам функций

$$y=1+x+x^2 \text{ и } y=0{,}5\left(x^2+3\right).$$

(12 баллов)

9. Определите все значения a, при которых уравнение $\left(x+1\right)^2=a(2|x|-1)$ имеет ровно два различных корня. Укажите эти корни при каждом из найденных значений a.

(12 баллов)

10. Через диагональ прямоугольного параллелепипеда и точку, лежащую на боковом ребре, не пересекающем эту диагональ, проведена плоскость так, чтобы площадь сечения параллелепипеда этой плоскостью была наименьшей. Найдите длины сторон основания параллелепипеда, если известно, что диагонали сечения равны 6 и $2\sqrt{3}$, а угол между ними $30°$. (12 баллов)

Решение варианта №7

1. Из пунктов A и B одновременно выехали навстречу друг другу два велосипедиста. Когда первый проехал половину пути, второму осталось проехать до пункта A 72 км, а когда второй проехал половину пути, первому осталось проехать до пункта B 45 км. На каком расстоянии от пункта A велосипедисты встретились?

Решение: Если l – расстояние между A и B, v_1, v_2 – скорости велосипедистов, то $\frac{l}{2v_1} = \frac{l-72}{v_2}$; $\frac{l}{2v_2} = \frac{l-45}{v_1}$; $\frac{x}{v_1} = \frac{l-x}{v_2}$. Из первых двух уравнений получаем:

$l^2/4 = l^2 - 117l + 72\cdot 45$, или $l^2 - 156l + 4320 = 0$; $l = 78 \pm 42,\quad l_1 = 120,\ l_2 = 36$ – пост. корень.

Подставляя $l = 120$ в первое и третье уравнения, получаем $\frac{60}{v_1} = \frac{48}{v_2}$ и $\frac{x}{v_1} = \frac{120-x}{v_2}$, откуда

$4x = 600 - 5x,\quad x = 66\frac{2}{3}$. **Ответ:** $66\frac{2}{3}$ км.

2. Решите уравнение $3^{1+\sqrt{x}} + 3^{2-\sqrt{x}} = 28$.

Решение: $3^{1+\sqrt{x}} + 3^{2-\sqrt{x}} = 28$. $3\cdot\left(3^{\sqrt{x}}\right)^2 - 28\cdot 3^{\sqrt{x}} + 9 = 0$;

$$3^{\sqrt{x}} = \frac{14 \pm \sqrt{196-27}}{3} = \frac{14 \pm 13}{3}.$$

1) $3^{\sqrt{x}} = 1/3$, нет решений; 2) $3^{\sqrt{x}} = 9,\quad \sqrt{x} = 2,\quad x = 4$. **Ответ:** $x = 4$.

3. Какое наименьшее значение может принять сумма первых n членов арифметической прогрессии (a_n), если $a_{35} = 2,\ a_{40} = 17$?

Решение: Если a – первый член и d – разность арифметической прогрессии,

$$\begin{cases} a + 34d = 2, \\ a + 39d = 17 \end{cases} \Leftrightarrow d = 3,\ a = -100.$$

Сумма первых n членов арифметической прогрессии S_n принимает наименьшее значение, если $a_n < 0$, а $a_{n+1} \ge 0$. Так как $a_n = a + d(n-1)$, то из неравенства $-100 + 3(n-1) < 0$ найдем $n = [103/3] = 34$.

Тогда $\min S_n = S_{34} = 0{,}5\cdot(-100 - 100 + 3\cdot 33)\cdot 34 = -1717$. **Ответ:** –1717.

4. Найдите все целочисленные решения системы

$$\begin{cases} \sqrt{2}\sin\frac{\pi(y+4)}{8} = \sqrt{2\sin^2\frac{\pi x}{8} - 2\sin^2\frac{\pi y}{8}\cos\frac{\pi x}{4} + 2\cos\frac{\pi x}{4}}, \\ |x| + |y-4| \le 4,\quad y < x + 2. \end{cases}$$

Решение:

Рассмотрим уравнение системы $\sqrt{2}\sin\frac{\pi(y+4)}{8} = \sqrt{2\sin^2\frac{\pi x}{8} - 2\sin^2\frac{\pi y}{8}\cos\frac{\pi x}{4} + 2\cos\frac{\pi x}{4}}$. Оно равносильно уравнению $\sqrt{2}\cos\frac{\pi y}{8} = \sqrt{2\sin^2\frac{\pi x}{8} + 2\cos^2\frac{\pi y}{8}\cos\frac{\pi x}{4}}$ или

$\sqrt{2}\cos\frac{\pi y}{8} = \sqrt{1 + 2\cos^2\frac{\pi y}{8}\cos\frac{\pi x}{4} - \cos\frac{\pi x}{4}}$. При условии $\sqrt{2}\cos\frac{\pi y}{8} \ge 0$, т.е. при $-4 + 16k \le y \le 4 + 16k,\ k \in Z$, имеем

$$2\cos^2\frac{\pi y}{8}-1-2\cos^2\frac{\pi y}{8}\cos\frac{\pi x}{4}+\cos\frac{\pi x}{4}=0 \;\Leftrightarrow\; (2\cos^2\frac{\pi y}{8}-1)(1-\cos\frac{\pi x}{4})=0 \;\Leftrightarrow$$

$$\sqrt{2}\cos\frac{\pi y}{8}=1 \text{ или } \cos\frac{\pi x}{4}=1 \;\Leftrightarrow\; y=2+16k,\ y=-2+16k,\ k\in Z, \text{ или } \ x=8n,\ n\in Z.$$

Целочисленными решениями системы будут точки $(l;\,2+16k),\,(l;\,-2+16k),\,(8n;\,m),\,l,k,n,m\in Z,\ -4+16s\le m\le 4+16s,\ s\in Z,$ лежащие в квадрате с центром в точке $(0;\,4)$, стороной $4\sqrt{2}$, диагоналями параллельными осям координат и в полуплоскости $y<x+2$. Такими точками будут $(0;\,0),\,(0;1),\,(1;\,2),\,(2;\,2)$.

Ответ: $(0;\,0),\,(0;1),\,(1;\,2),\,(2;\,2)$.

5. Решите неравенство $\dfrac{|x+1|-\sqrt{3x+7}}{\sqrt{4-2x}-\sqrt{x^2+x}}\ge 0.$

Решение:

ОДЗ числителя и знаменателя: $3x+7\ge 0,\quad x(x+1)\ge 0,\quad 4-2x\ge 0,\ \Rightarrow$ $x\in[-7/3;\,-1]\cup[0;\,2]$.

На ОДЗ исходное неравенство эквивалентно следующему

$$\frac{(x+1)^2-3x-7}{x^2+x-(4-2x)}\le 0 \;\Rightarrow\; \frac{x^2-x-6}{(x+4)(x-1)}\le 0 \Rightarrow \frac{(x+2)(x-3)}{(x+4)(x-1)}\le 0 \Rightarrow x\in(-4;\,-2]\cup(1;\,3].$$

Окончательно имеем $x\in[-7/3;\,-2]\cup(1;\,2]$.

Ответ: $x\in[-7/3;\,-2]\cup(1;\,2]$.

6. Найдите множество значений функции $f(x)=g(g^2(x))$, где $g(x)=\dfrac{3}{|x-2|+1}$.

Решение: Функция $g(x)==\dfrac{3}{|x-2|+1}$ определена на всей числовой оси и принимает все значения из промежутка $(0;\,3]$. Функция $g(x)$ достигает максимального значения в точке $x=2$, $g_{\max}=g(2)=3$, на промежутке $(-\infty;\,2)$ функция $g(x)$ возрастает, на промежутке $(2;\,+\infty)-$ убывает. Функция $g^2(x)$ принимает все значения из промежутка $(0;\,9]$, поскольку $t=g(x)\in(0;\,3]$, а функция t^2 возрастает в этом промежутке. Для нахождения множества значений функции $f(x)=g(g^2(x))$ достаточно найти множество значений функции $g(x)$ на промежутке $(0;\,9]$. На указанном промежутке $g(x)$ принимает все значения из множества $[g(9);\,g(2)]=[3/8;\,3]$.

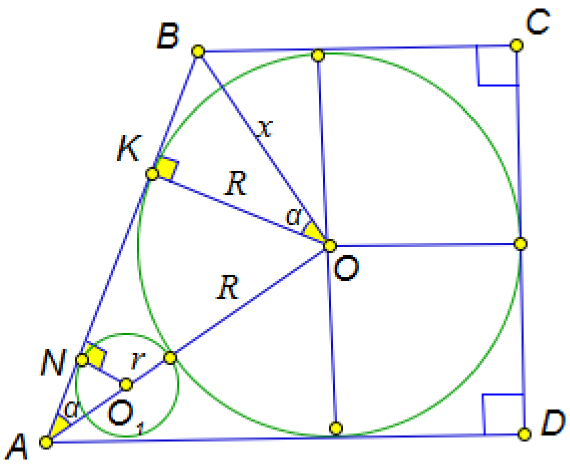
Ответ: $E_f=\left[\dfrac{3}{8};\,3\right]$.

7. В прямоугольную трапецию $ABCD$ с углом A, равным $2\arccos\frac{15}{17}$ вписана окружность. Вторая окружность с радиусом $\frac{18}{25}$ касается сторон AB и AD трапеции и вписанной в нее окружности. Найдите площадь треугольника ABD.

Решение: Пусть O - центр вписанной в трапецию окружности, O_1 - центр окружности, касающейся сторон AB и AD трапеции и вписанной в нее окружности. Пусть для определенности угол D прямой (случай с прямым углом B рассматривается аналогично). Точки K и N - точки касаний стороны AB окружностей с центрами в точках O и O_1 соответственно. Треугольник OAB прямоугольный, угол AOB равен $90°$ (AO и BO - биссектрисы углов A и B, сумма этих углов равна $180°$). Пусть $x = OB$, $\alpha = \angle OAB = \frac{\angle BAD}{2} = \arccos\frac{15}{17}$. Так как $OK \perp AB$, $\angle BOK = \alpha = \arccos\frac{15}{17}$, то $R = OK = x\cos\alpha = \frac{15}{17}x$ (R - радиус вписанной в трапецию окружности). В прямоугольном треугольнике OAB имеем: $AB = \frac{x}{\sin\alpha} = \frac{17}{8}x$, $OA = \frac{x}{tg\alpha} = \frac{15}{8}x$. В прямоугольном треугольнике NAO_1 имеем: $AO_1 = \frac{r}{\sin\alpha} = \frac{153}{100} = 1{,}53$, r - радиус второй окружности из условия задачи, $r = \frac{18}{25} = 0{,}72$. Для отрезка OA получаем соотношение $OA = R + r + AO_1 = \frac{15}{17}x + 0{,}72 + 1{,}53$, следовательно, $\frac{15}{8}x = \frac{15}{17}x + 0{,}72 + 1{,}53$, $x = \frac{34}{15}$.
Найдем площадь треугольника ABD:

$$S_{ABD} = AD \cdot R = (AO\cos\alpha + R)R = R(\frac{15\cdot 15}{8\cdot 17}x + R) = 2(3{,}75 + 2) = 11{,}5.$$

Ответ: $11{,}5$.



8. Составьте уравнение общей касательной к графикам функций
$y = 1 + x + x^2$ и $y = 0{,}5\left(x^2 + 3\right)$.

Решение:
$y = 1 + x + x^2$, $y = 0{,}5\left(x^2 + 3\right)$, $y = ax + b$.

$1+x+x^2=ax+b,\ x^2+(1-a)x+1-b=0.$

$D=(1-a)^2-4(1-b)=0,\ a^2-2a+4b-3=0.$ (*)

$0,5\left(x^2+3\right)=ax+b,\ x^2-2ax-2b+3=0.$

$D/4=a^2-(-2b+3)=0,\ a^2+2b-3=0.$ (**)

Из (*) и (**) получаем $a^2+2a-3=0,\ a_1=1,\ a_2=-3.$

$b=\dfrac{3-a^2}{2},\ b_1=1, b_2=-3.$

Ответ: $y=x+1,\ y=-3(x+1).$

9. Определите все значения *a*, при которых уравнение $(x+1)^2=a(2|x|-1)$ имеет ровно два различных корня. Укажите эти корни при каждом из найденных значений *a*.

Решение:

I. $x\ge 0,\ x^2+2x+1=2ax-a;\ x^2-2(a-1)x+a+1=0;$

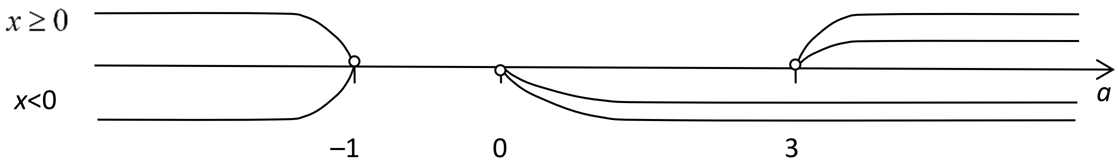
$$D/4=a^2-2a+1-a-1=a^2-3a.$$

1) два различных неотрицательных корня $x_{1,2}=a-1\pm\sqrt{a^2-3a}$, если:

$$\begin{cases} a^2-3a>0, \\ a-1>0, \\ a+1\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a<0, \\ a>3, \end{array}\right. \\ a>1 \end{cases} \Leftrightarrow a>3.$$

2) один неотрицательный корень $x=a-1+\sqrt{a^2-3a}$, если:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a^2-3a=0, \\ a-1\ge 0, \end{cases} \\ a+1<0, \\ \begin{cases} a+1=0, \\ a-1<0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=3, \\ a<-1, \\ a=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=3, \\ a\le -1. \end{array}\right.$$



II. $x<0,\ x^2+2x+1=-2ax-a;\ x^2+2(a+1)x+a+1=0;$

$D/4=a^2+2a+1-a-1=a^2+a.$

1) два различных отрицательных корня $x_{1,2}=-a-1\pm\sqrt{a^2+a}$, если:

$$\begin{cases} a^2+a>0, \\ a+1>0, \\ a+1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a>0, \\ a>-1 \end{cases} \Leftrightarrow a>0.$$

2) один отрицательный корень $x=-a-1-\sqrt{a^2+a}$, если:

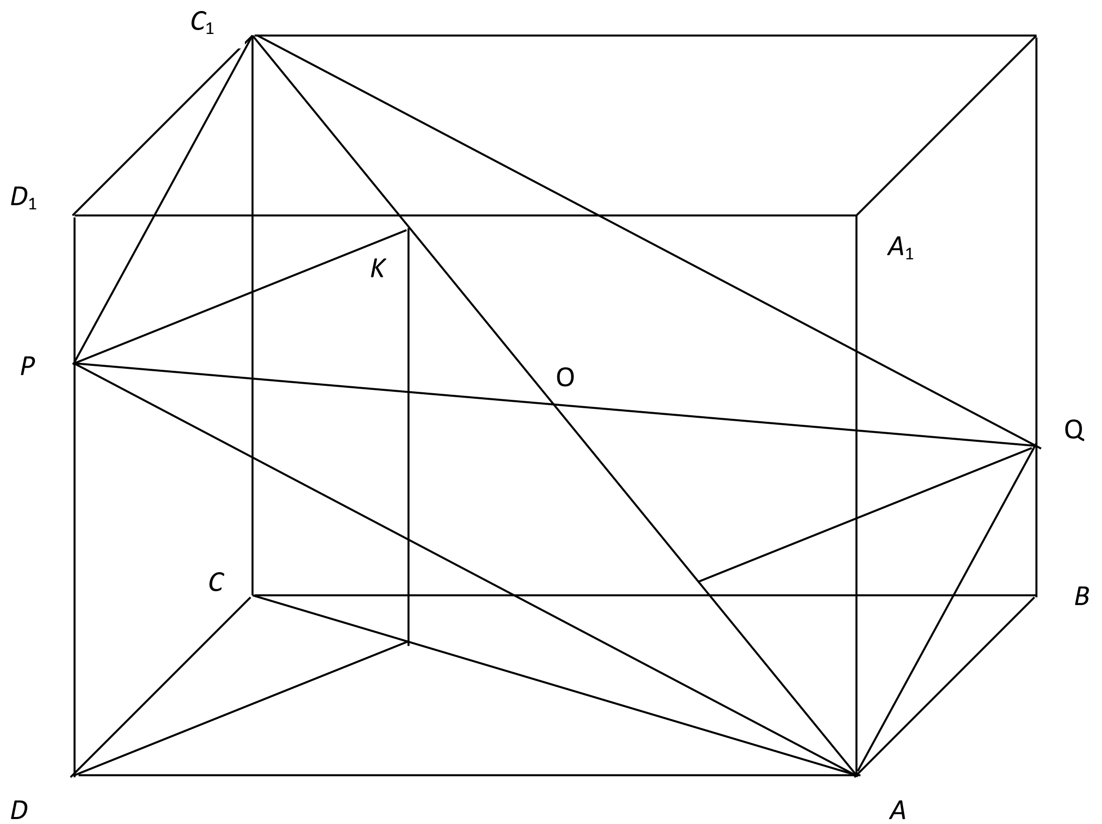
$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a^2+a=0,\\ a+1>0,\end{cases}\\ a+1<0,\\ \begin{cases}a+1=0,\\ a+1>0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a=0,\\ a<-1.\end{array}\right.$$

Ответ: $a<-1,\ x_1=a-1+\sqrt{a^2-3a},\ x_2=-a-1-\sqrt{a^2+a}$;

$0<a<3,\ x_{1,2}=-a-1\pm\sqrt{a^2+a}$.

10. Через диагональ прямоугольного параллелепипеда и точку, лежащую на боковом ребре, не пересекающем эту диагональ, проведена плоскость так, чтобы площадь сечения параллелепипеда этой плоскостью была наименьшей. Найдите длины сторон основания параллелепипеда, если известно, что диагонали сечения равны 6 и $2\sqrt{3}$, а угол между ними $30°$.

Решение:



Проведем $DL\perp AC,\ LK\| CC_1\ (K\in AC_1),\ PK\| DL$. Откладывая на боковом ребре BB_1 отрезок $BQ=PD_1$, получаем параллелограмм $PAQC_1$, который будет сечением наименьшей площади; при этом AC_1–его большая, а PQ –меньшая диагонали, заданные в условии.

$AC_1=6,\quad PQ=2\sqrt{3},\quad \varphi=30°,\quad \sin\varphi=1/2,\quad \cos\varphi=\sqrt{3}/2.$

$DL = PK = \frac{1}{2} \cdot PQ \cdot \sin\varphi = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$ $\quad OK = \frac{1}{2} \cdot PQ \cdot \cos\varphi = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2}.$

$\frac{CL}{AL} = \frac{C_1K}{AK} = \frac{C_1O - OK}{C_1O + OK} = \frac{3 - 3/2}{3 + 3/2} = \frac{1}{3}.$ Пусть $CL = x,$ тогда $AL = 3x$.

$DL^2 = CL \cdot AL,$ т.е. $\frac{3}{4} = 3x^2,$ $\quad x = \frac{1}{2},$ $CL = \frac{1}{2},$ $AL = \frac{3}{2}$. Тогда $CD = \sqrt{DL^2 + CL^2} = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = 1,$

$AD = \sqrt{DL^2 + AL^2} = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{9}{4}} = \sqrt{3}$.

Ответ: $1; \sqrt{3}$.