Первый (отборочный) этап академического соревнования

Олимпиады школьников «Шаг в будущее» по образовательному предмету «Математика», осень 2013 г.

Вариант № 1

1. Двое рабочих одновременно приступили к изготовлению одинаковых партий деталей. Когда первый рабочий сделал половину деталей, второму оставалось изготовить 24 детали, а когда второй выполнил половину работы, первому оставалось сделать 15 деталей. Сколько деталей осталось изготовить второму рабочему, когда первый выполнил свою работу? (8 баллов)

2. Решите уравнение $2^x - 6\cdot 2^{1-x} = 1$. (8 баллов)

3. Какое наибольшее значение может принять сумма первых n членов арифметической прогрессии (a_n), если $a_{17} = 52,\ a_{30} = 13$? (8 баллов)

4. Найдите все целочисленные решения системы

$$\begin{cases} \sqrt{2}\cos\dfrac{\pi y}{8} = \sqrt{1 + 2\cos^2\dfrac{\pi y}{8}\cos\dfrac{\pi x}{4} - \cos\dfrac{\pi x}{4}}, \\ |x| + |y-4| \le 4, \quad y < x+2. \end{cases}$$

(8 баллов)

5. Решите неравенство $\dfrac{\sqrt{x^2+x} - \sqrt{4-2x}}{2x+5-2\sqrt{x^2+5x+6}} \le 0.$ (10 баллов)

6. Найдите множество значений функции $f(x) = g(g^2(x))$, где $g(x) = 3\big/\left(x^2 - 4x + 5\right)$.

(10 баллов)

7. В прямоугольную трапецию $ABCD$ с углом A, равным $2\arccos(15/17)$, вписана окружность. Вторая окружность с радиусом 10,8 касается сторон AB и AD трапеции и вписанной в нее окружности. Найдите площадь трапеции $ABCD$.

(12 баллов)

8. Составьте уравнение общей касательной к графикам функций

$$y = 1 + x - x^2 \text{ и } y = 0{,}5\left(x^2+3\right).$$

(12 баллов)

9. Определите все значения a, при которых уравнение $(x-a)^2 - 1 = 2\left(x + |x|\right)$ имеет ровно два различных корня. Укажите эти корни при каждом из найденных значений a.

(12 баллов)

10. Через диагональ прямоугольного параллелепипеда и точку, лежащую на боковом ребре, не пересекающем эту диагональ, проведена плоскость так, чтобы площадь сечения параллелепипеда этой плоскостью была наименьшей. Найдите объем параллелепипеда, если известно, что диагонали сечения равны 3 и $\sqrt{3}$, а угол между ними 30°. (12 баллов)

Решение варианта №1

1. Двое рабочих одновременно приступили к изготовлению одинаковых партий деталей. Когда первый рабочий сделал половину деталей, второму оставалось изготовить 24 детали, а когда второй выполнил половину работы, первому оставалось сделать 15 деталей. Сколько деталей осталось изготовить второму рабочему, когда первый выполнил свою работу?

Решение: Если n – количество деталей в партии, p_1 и p_2 – производительности рабочих, то $\frac{n}{2p_1}=\frac{n-24}{p_2}$; $\frac{n}{2p_2}=\frac{n-15}{p_1}$; $\frac{n}{p_1}=\frac{n-x}{p_2}$. Из первых двух уравнений получаем:

$n^2/4=n^2-39n+360$, или $n^2-52n+480=0$; $n=26\pm 14,\ n_1=12-\text{пост. корень}, n_2=40$.

Подставляя $n=40$ в первое и третье уравнения, получаем $\frac{20}{p_1}=\frac{16}{p_2}$ и $\frac{40}{p_1}=\frac{40-x}{p_2}$, откуда

$40-x=32,\ x=8$. **Ответ:** 8 деталей.

2. Решите уравнение $2^x-6\cdot 2^{1-x}=1$.

Решение: $2^x-6\cdot 2^{1-x}=1$, $\left(2^x\right)^2-2^x-12=0$; $2^x=\left(1\pm 7\right)/2$, $2^x=4$, $x=2$. **Ответ:** $x=2$.

3. Какое наибольшее значение может принять сумма первых n членов арифметической прогрессии $\left(a_n\right)$, если $a_{17}=52,\ a_{30}=13$?

Решение: Если a – первый член и d – разность арифметической прогрессии,

$$\begin{cases} a+16d=52, \\ a+29d=13 \end{cases} \Leftrightarrow d=-3,\ a=100.$$

Сумма первых n членов арифметической прогрессии S_n принимает наибольшее значение, если $a_n>0$, а $a_{n+1}\le 0$. Так как $a_n=a+d(n-1)$, то из неравенства $100-3(n-1)>0$ найдем $n=\left[103/3\right]=34$. Тогда $\max S_n=S_{34}=0,5\cdot(100+100-3\cdot 33)\cdot 34=1717$.

Ответ: 1717.

4. Найдите все целочисленные решения системы

$$\begin{cases} \sqrt{2}\cos\frac{\pi y}{8}=\sqrt{1+2\cos^2\frac{\pi y}{8}\cos\frac{\pi x}{4}-\cos\frac{\pi x}{4}}, \\ |x|+|y-4|\le 4, \quad y<x+2. \end{cases}$$

Решение:

Рассмотрим уравнение системы $\sqrt{2}\cos\frac{\pi y}{8}=\sqrt{1+2\cos^2\frac{\pi y}{8}\cos\frac{\pi x}{4}-\cos\frac{\pi x}{4}}$. При условии

$\sqrt{2}\cos\frac{\pi y}{8}\ge 0$, т.е. при $-4+16k\le y\le 4+16k,\ k\in Z,$ имеем

$$2\cos^2\frac{\pi y}{8}-1-2\cos^2\frac{\pi y}{8}\cos\frac{\pi x}{4}+\cos\frac{\pi x}{4}=0 \quad\Leftrightarrow\quad (2\cos^2\frac{\pi y}{8}-1)(1-\cos\frac{\pi x}{4})=0 \quad\Leftrightarrow$$

$\sqrt{2}\cos\frac{\pi y}{8}=1$ или $\cos\frac{\pi x}{4}=1 \quad\Leftrightarrow y=2+16k,\ y=-2+16k,\ k\in Z,$ или $x=8n,\ n\in Z$.

Целочисленными решениями системы будут точки

$(l;\ 2+16k), (l;\ -2+16k), (8n;\ m), l,k,n,m\in Z,\ -4+16s\le m\le 4+16s,\ s\in Z,$ лежащие в квадрате с центром в точке $(0;\,4)$, стороной $4\sqrt{2}$, диагоналями параллельными осям координат и в полуплоскости $y < x + 2$. Такими точками будут $(0;\,0), (0;1), (1;\,2), (2;\,2)$.

Ответ: $(0;\,0), (0;1), (1;\,2), (2;\,2)$.

5. Решите неравенство $\dfrac{\sqrt{x^2+x}-\sqrt{4-2x}}{2x+5-2\sqrt{x^2+5x+6}} \le 0.$

Решение:

ОДЗ числителя и знаменателя: $x(x+1) \ge 0, \quad 4-2x \ge 0, \quad x^2+5x+6 \ge 0, \quad \Rightarrow$ $x \in (-\infty;\,-3] \cup [-2;\,-1] \cup [0;\,2]$.

На ОДЗ исходное неравенство эквивалентно следующему

$$\frac{x^2+x-(4-2x)}{(x+3)-2\sqrt{(x+3)(x+2)}+x+2} \le 0 \quad \Rightarrow \frac{(x+4)(x-1)}{(x+3)-2\sqrt{(x+3)(x+2)}+x+2} \le 0\,.$$

Если $x \ge -2$, то приходим к неравенству $\dfrac{(x+4)(x-1)}{(\sqrt{x+3}-\sqrt{x+2})^2} \le 0$, и $x \in [-2;\,1]$.

С учетом ОДЗ $x \in [-2;\,-1] \cup [0;1]$.

Если $x \le -3$, то приходим к неравенству $\dfrac{(x+4)(x-1)}{-(\sqrt{-x-3}+\sqrt{-x-2})^2} \le 0$, и

$x \in (-\infty;\,-4]$, что входит в ОДЗ.

Окончательно имеем $x \in (-\infty;\,-4] \cup [-2;\,-1] \cup [0;\,1]$.

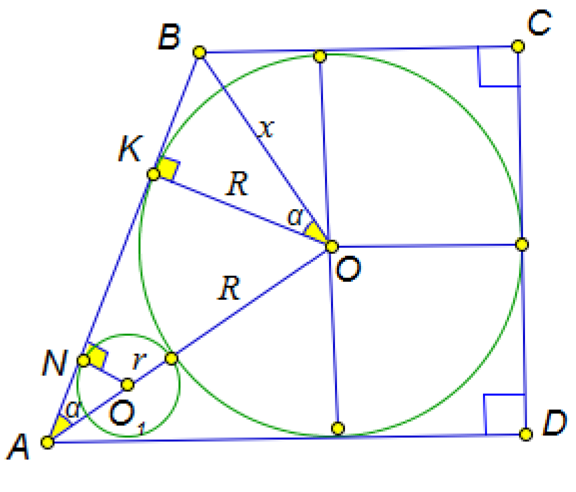
Ответ: $x \in (-\infty;\,-4] \cup [-2;\,-1] \cup [0;\,1]$.

6. Найдите множество значений функции $f(x) = g(g^2(x))$, где $g(x) = \dfrac{3}{x^2-4x+5}$.

Решение: Функция $g(x) = \dfrac{3}{x^2-4x+5} = \dfrac{3}{(x-2)^2+1}$ определена на всей числовой оси и принимает все значения из промежутка $(0;\,3]$. Функция $g(x)$ достигает максимального значения в точке $x = 2$, $g_{\max} = g(2) = 3$, на промежутке $(-\infty;\,2)$ функция $g(x)$ возрастает, на промежутке $(2;\,+\infty)$ − убывает. Функция $g^2(x)$ принимает все значения из промежутка $(0;\,9]$, поскольку $t = g(x) \in (0;\,3]$, а функция t^2 возрастает в этом промежутке. Для нахождения множества значений функции $f(x) = g(g^2(x))$ достаточно найти множество значений функции $g(x)$ на промежутке $(0;\,9]$. На указанном промежутке $g(x)$ принимает все значения из множества $[g(9);\,g(2)] = [3/50;\,3]$. Ответ: $E_f = \left[\dfrac{3}{50};\,3\right]$.

7. В прямоугольную трапецию $ABCD$ с углом A, равным $2\arccos\frac{15}{17}$ вписана окружность. Вторая окружность с радиусом 10,8 касается сторон AB и AD трапеции и вписанной в нее окружности. Найдите площадь трапеции $ABCD$.

Решение: Пусть O - центр вписанной в трапецию окружности, O_1 - центр окружности, касающейся сторон AB и AD трапеции и вписанной в нее окружности. Пусть для определенности угол D прямой (случай с прямым углом B рассматривается аналогично). Точки K и N - точки касаний стороны AB окружностей с центрами в точках O и O_1 соответственно. Треугольник OAB прямоугольный, угол AOB равен $90°$ (AO и BO - биссектрисы углов A и B, сумма этих углов равна $180°$). Пусть $x = OB$, $\alpha = \angle OAB = \frac{\angle BAD}{2} = \arccos\frac{15}{17}$. Так как $OK \perp AB$, $\angle BOK = \alpha = \arccos\frac{15}{17}$, то $R = OK = x\cos\alpha = \frac{15}{17}x$ (R - радиус вписанной в трапецию окружности). В прямоугольном треугольнике OAB имеем: $AB = \frac{x}{\sin\alpha} = \frac{17}{8}x$, $OA = \frac{x}{tg\alpha} = \frac{15}{8}x$. В прямоугольном треугольнике NAO_1 имеем: $AO_1 = \frac{r}{\sin\alpha} = \frac{459}{20} = 22{,}95$, r - радиус второй окружности из условия задачи, $r = 10{,}8$. Для отрезка OA получаем соотношение $OA = R + r + AO_1 = \frac{15}{17}x + 10{,}8 + 22{,}95$, следовательно, $\frac{15}{8}x = \frac{15}{17}x + 10{,}8 + 22{,}95$, $x = 34$.
Найдем площадь трапеции $ABCD$:
$S_{ABCD} = \frac{AD+BC}{2}2R = R(AB+2R) = 30(\frac{17\cdot 34}{8} + 60) = 3967{,}5$. **Ответ:** 3967,5.



8. Составьте уравнение общей касательной к графикам функций
$y = 1 + x - x^2$ и $y = 0{,}5(x^2+3)$.

Решение: $y = 1 + x - x^2$, $y = 0{,}5(x^2+3)$, $y = ax + b$.

$1 + x - x^2 = ax + b$, $x^2 + (a-1)x + b - 1 = 0$.

$D = (a-1)^2 - 4b + 4 = 0$, $a^2 - 2a - 4b + 5 = 0$. (*)

$0{,}5(x^2+3) = ax + b$, $x^2 - 2ax - 2b + 3 = 0$.

$D/4 = a^2 - (-2b+3) = 0,\ a^2 + 2b - 3 = 0$. (**)

Из (*) и (**) получаем $3a^2 - 2a - 1 = 0,\ a_1 = 1,\ a_2 = -1/3$.

$b = \dfrac{3-a^2}{2},\ b_1 = 1, b_2 = \dfrac{13}{9}$.

Ответ: $y = x+1,\ y = -\dfrac{1}{3}x + \dfrac{13}{9}$.

9. Определите все значения *a*, при которых уравнение $(x-a)^2 - 1 = 2\left(x + |x|\right)$ имеет ровно два различных корня. Укажите эти корни при каждом из найденных значений *a*.

Решение:

I. $x \ge 0,\quad (x-a)^2 - 1 = 4x,\ x^2 - 2(a+2)x + a^2 - 1 = 0$; $D/4 = a^2 + 4a + 4 - a^2 + 1 = 4a + 5$.

Уравнение имеет два различных неотрицательных корня $x_{1,2} = a + 2 \pm \sqrt{4a+5}$, если

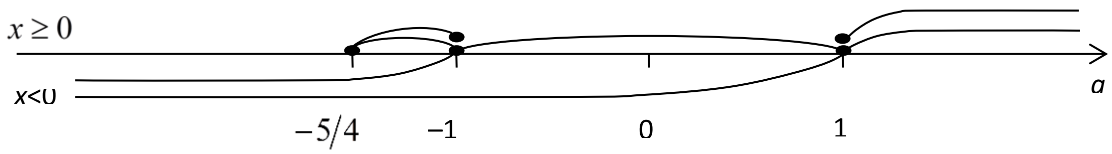
$$\begin{cases} 4a+5>0, \\ a+2>0, \\ a^2-1\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > -5/4, \\ \left[\begin{array}{l} a \le -1, \\ a \ge 1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -5/4 < a \le -1, \\ a \ge 1. \end{array}\right.$$

Уравнение имеет ровно один неотрицательный корень $x_{1,2} = a + 2 + \sqrt{4a+5}$, если

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} D = 4a+5 = 0, \\ a+2 \ge 0, \end{cases} \\ a^2 - 1 < 0, \\ \begin{cases} a^2 - 1 = 0, \\ a+2 < 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = -5/4, \\ a > -2, \end{cases} \\ -1 < a < 1, \\ \begin{cases} a^2 - 1 = 0, \\ a+2 < 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = -5/4, \\ -1 < a < 1. \end{array}\right.$$

II. $x < 0,\quad (x-a)^2 - 1 = 0$.

Корень $x_1 = a+1 < 0$, если $a < -1$, и корень $x_2 = a - 1 < 0$, если $a < 1$, то есть, уравнение имеет два различных отрицательных корня $x_{1,2} = a \pm 1$, если $-\infty < a < -1$, и уравнение имеет ровно один отрицательный корень $x = a - 1$, если $-1 \le a < 1$.



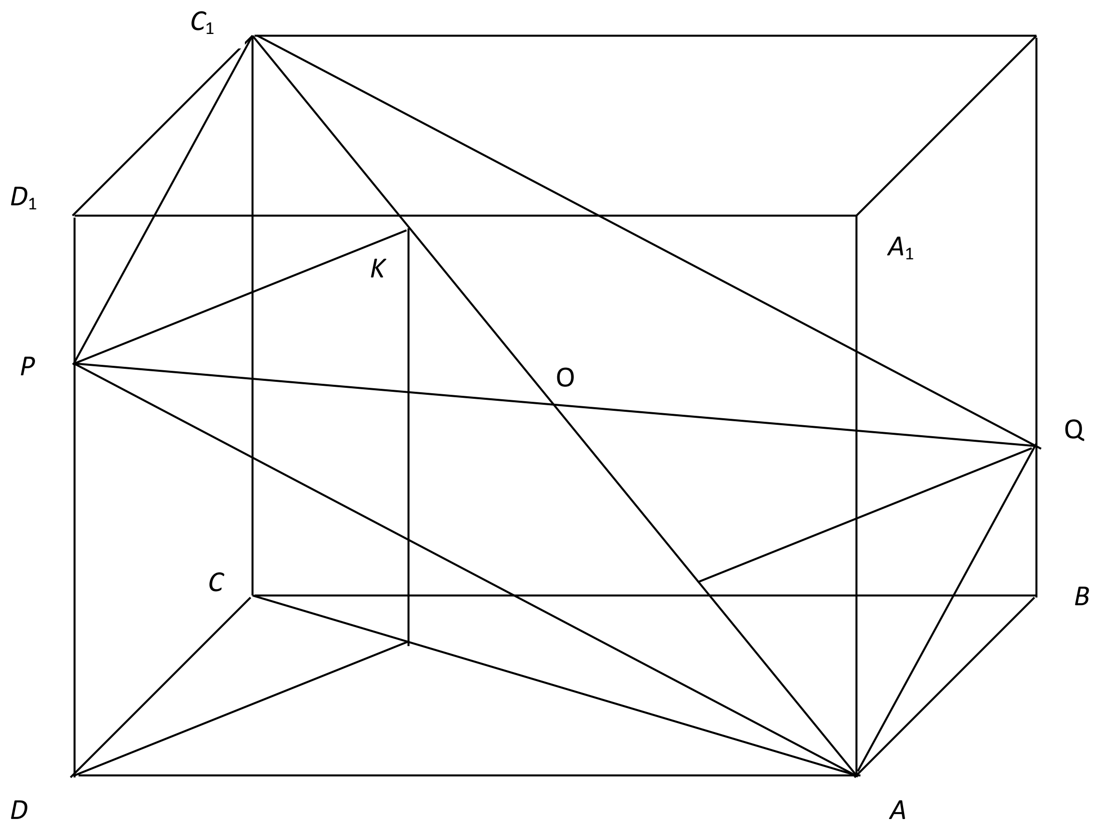
Ответ: $a \in (-\infty; -5/4),\quad x_{1,2} = a \pm 1$;

$a \in (-1; 1),\quad x_1 = a - 1,\quad x_2 = a + 2 + \sqrt{4a+5}$;

$a \in [1; +\infty),\quad x_{1,2} = a + 2 \pm \sqrt{4a+5}$.

10. Через диагональ прямоугольного параллелепипеда и точку, лежащую на боковом ребре, не пересекающем эту диагональ, проведена плоскость так, чтобы площадь сечения параллелепипеда этой плоскостью была наименьшей. Найдите объем параллелепипеда, если известно, что диагонали сечения равны 3 и $\sqrt{3}$, а угол между ними $30°$.

Решение:



Проведем $DL \perp AC,\ LK \| CC_1\ (K \in AC_1),\ PK \| DL$. Откладывая на боковом ребре BB_1 отрезок $BQ=PD_1$, получаем параллелограмм $PAQC_1$, который будет сечением наименьшей площади; при этом AC_1–его большая, а PQ –меньшая диагонали, заданные в условии.

$AC_1 = 3,\ PQ = \sqrt{3},\ \varphi = 30°,\ \sin\varphi = 1/2,\ \cos\varphi = \sqrt{3}/2.$

$DL = PK = \frac{1}{2}\cdot PQ\cdot\sin\varphi = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}.\quad OK = \frac{1}{2}\cdot PQ\cdot\cos\varphi = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{4}.$

$\frac{CL}{AL} = \frac{C_1K}{AK} = \frac{C_1O - OK}{C_1O + OK} = \frac{3/2 - 3/4}{3/2 + 3/4} = \frac{1}{3}.$ Пусть $CL = x,$ тогда $AL = 3x,\ AC = 4x.$

$DL^2 = CL\cdot AL,$ т.е. $\frac{3}{16} = 3x^2,\ x = \frac{1}{4},\ AC = 1.\ CC_1 = \sqrt{AC_1^2 - AC^2} = \sqrt{9-1} = 2\sqrt{2}.$

Объем $V = AC\cdot DL\cdot CC_1 = 1\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 2\sqrt{2} = \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$ **Ответ:** $V = \frac{\sqrt{6}}{2}.$