

Московский государственный технический университет
имени Н.Э.Баумана

Олимпиада школьников «Шаг в будущее»

XVI физико-математическая олимпиада для учащихся 8-10 классов

МАТЕМАТИКА 1 тур (заочный)

2012-2013 учебный год

1. (8 класс) Сравните числа 80^{12} и 10^{28} .
2. (8 класс) Докажите, что если выражение $n^{2012} - 1$ не делится на 5, то выражение $n^3 - n$ делится на 30 (n – натуральное число).
3. (8 класс) Угол A треугольника ABC равен 48° . Точка E лежит на стороне BC так, что прямая AE делит данный треугольник на два равнобедренных треугольника. Найдите наибольший угол треугольника ABC .
4. (8-9 класс) Определите, имеет ли корни уравнение
$$\sqrt{2011 - 2012x} + \sqrt{2013x - 2012} = 1.$$
5. (8-9 класс) Найдите значение выражения

$$\frac{(2+3)(2^2+3^2)\dots(2^{256}+3^{256})(2^{512}+3^{512})+2^{1024}}{3^{1024}}.$$

6. (8-9 класс) Найдите все целые значения a и b такие, что выражение $a^4 + 4b^4$ является простым числом.
7. (9-10 класс) Найдите кратчайшее расстояние от точки, принадлежащей параболе $y = x^2 - 8x + 16$, до прямой $y = -2x + 1$.
8. (9-10 класс) Дан угол величиной 60° и точка M такая, что расстояние от неё до одной из сторон угла равно 1, а от неё до вершины угла - $2\sqrt{7}$. Найдите расстояние от точки M до другой стороны данного угла.
9. (9-10 класс) Как разрезать прямоугольник со сторонами 10 и 33 см на три подобных прямоугольника, среди которых нет равных? Сколько решений имеет задача?
10. (10 класс) Из пунктов A и B , расположенных вдоль реки, одновременно с одной и той же собственной скоростью, равной 12 км/ч, навстречу друг другу вышли два катера. После встречи они продолжили свой путь. Каждый из катеров прибыл в пункт назначения, сразу же развернулся и отправился обратно. На обратном пути катера снова встретились, причем между

моментами двух встреч прошло 17 ч. Через 32 ч после выхода катера вернулись в исходные пункты. Найдите скорость течения реки.

11. (10 класс) Докажите, что если α, β - острые углы и $\operatorname{tg} \beta = 3 \cdot \operatorname{tg} \alpha$,

$$\text{то } \beta \leq \alpha + \frac{\pi}{6}.$$

12. (10 класс) Решите в натуральных числах уравнение

$$x^y - x^{y-1} - x^{y-2} - x^{y-3} - x^{y-4} - x^{y-5} = 1.$$