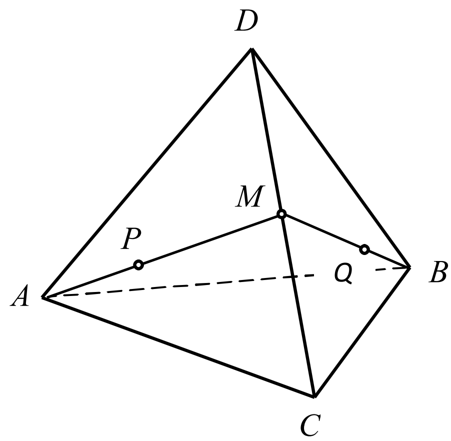
ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНОГО (ОЧНОГО) ЭТАПА ОЛИМПИАДЫ МГТУ ИМ. Н. Э. БАУМАНА «ШАГ В БУДУЩЕЕ» ПО МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ 8-10 КЛАССОВ 2013-2014 УЧЕБНОГО ГОДА.

ВАРИАНТ 1 (10 класс)

1. Петя, Вася и Толя соревнуются в беге на дистанции AB. Если Петя и Вася одновременно выбегут из пунктов A и B навстречу друг другу, а Толя выбежит с ними одновременно, то Толя успеет пробежать всю дистанцию до момента встречи Пети и Васи. Если Петя и Толя побегут навстречу друг другу, а Вася выбежит с ними одновременно, то Вася успеет пробежать половину дистанции до момента встречи Пети и Толи. Успеет ли Петя пробежать четверть дистанции к моменту встречи Толи и Васи, если они побегут навстречу друг другу?



2. Дан правильный тетраэдр $ABCD$ с ребром a. На медиане AM грани ACD взята точка P так, что $2|AP| = |PM|$, а на медиане BM грани BCD точка — Q так, что $2|BQ| = |QM|$. Найти длину кратчайшего пути из P в Q по поверхности тетраэдра.

3. Определить координаты точки, лежащей на графике функции $y = 4k - kx$, в которой разность квадрата абсциссы и ординаты принимает наименьшее значение. При каком значении параметра k оно достигается?

4. Решить уравнение $\left|\operatorname{ctg} x\right| + \dfrac{1}{\left|\operatorname{ctg} x\right|} = \sqrt[6]{-\operatorname{tg}^2 x - 2\operatorname{tg} x + 63}$.

5. Длины катетов прямоугольного треугольника равны 3 и 4. На его гипотенузе как на стороне внешним образом построен квадрат. Найти расстояние от вершины прямого угла треугольника до центра квадрата.

6. Известно, что оба корня квадратичной функции $f_1(x) = 3x^2 + ax + b$ больше 2014, а оба корня квадратичной функции $f_2(x) = 2x^2 + cx + d$ меньше 2014 ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$). Может ли функция $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ иметь два действительных корня, один из которых больше 2014, а другой — меньше?

7. Найти все значения параметра a, при которых решением системы неравенств $\begin{cases} x^2-4x+2a\geq 0 \\ (a-2)\left(x^2-ax+2\right)\geq 0 \end{cases}$ является множество всех действительных чисел.

8. Найти наименьшее значение выражения $\sqrt{(x-3)^2+(y-2)^2}+\sqrt{(x-6)^2+(y+2)^2}$.

9. Пусть O - точка пересечения медиан треугольника ABC, M - произвольная точка на окружности с центром в точке O. Доказать, что сумма $AM^2+BM^2+CM^2$ не зависит от выбора точки M на окружности.

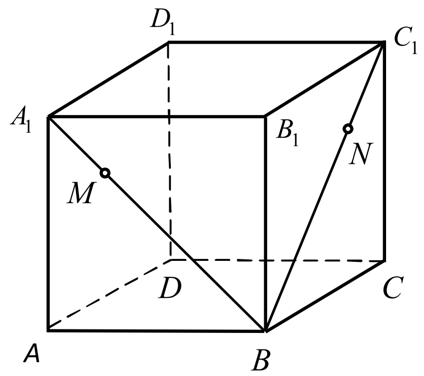
10. Найти сумму:

$$\frac{\pi}{4}+\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\operatorname{arctg}\frac{1}{7}+\operatorname{arctg}\frac{1}{13}+\ldots+\operatorname{arctg}\frac{1}{n^2-n+1}+\ldots+\operatorname{arctg}\frac{1}{2014^2-2014+1}.$$

Задание	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**Итого**
Баллы	8	8	10	10	10	10	10	10	12	12	**100**

ВАРИАНТ 2 (10 класс)

1. Саша, Дима и Коля соревнуются в беге на дистанции *AB*. Если Саша и Дима одновременно выбегут из пунктов *A* и *B* навстречу друг другу, а Коля выбежит с ними одновременно, то Коля успеет пробежать всю дистанцию до момента встречи Саши и Димы. Если Саша и Коля побегут навстречу друг другу, а Дима выбежит с ними одновременно, то Дима успеет пробежать $\frac{3}{5}$ дистанции до момента встречи Саши и Коли. Успеет ли Саша пробежать шестую часть дистанции к моменту встречи Коли и Димы, если они побегут навстречу друг другу?



2. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром, равным a, на диагонали боковой грани A_1B выбрана точка M так, что $A_1M : MB = 1:3$, а на диагонали BC_1 выбрана точка N так, что $BN : BC_1 = 3:4$. Найти длину кратчайшего пути из M в N по поверхности куба.

3. Определить координаты точки, лежащей на графике функции $y = -3k - kx$, в которой сумма квадрата абсциссы и ординаты принимает наименьшее значение. При каком значении параметра k оно достигается?

4. Решить уравнение $\left|\operatorname{tg} x + \frac{1}{\operatorname{tg} x}\right| = \sqrt[4]{-\operatorname{ctg}^2 x + 2\operatorname{ctg} x + 15}$.

5. Углы при основании равнобедренного треугольника *ABC* с основанием *AC* равны 75°. В каком отношении, считая от вершины *C*, высота *BH* делит высоту *CE*?

6. Известно, что оба корня квадратичной функции $f_1(x) = -x^2 + mx + n$ больше 1580, а оба корня квадратичной функции $f_2(x) = -2x^2 + px + q$ меньше 1580 ($m, n, p, q \in \mathbb{R}$). Может ли функция $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ иметь два действительных корня, один из которых больше 1580, а другой — меньше?

7. Найти все значения параметра a, при которых система неравенств $\begin{cases}(a-1)\left(2x^2+ax+1\right)>0\\ x^2-2x+a>0\end{cases}$ не имеет решений.

8. Найти наибольшее значение выражения $\sqrt{(x+1)^2+(y+3)^2}-\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2}$.

9. Пусть O - точка пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$, M- произвольная точка на окружности с центром в точке O. Доказать, что сумма $AM^2+BM^2+CM^2+DM^2$ не зависит от выбора точки M на окружности.

10. Найти сумму:

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\operatorname{arctg}\frac{1}{7}+\operatorname{arctg}\frac{1}{13}+\ldots+\operatorname{arctg}\frac{1}{n^2+n+1}+\ldots+\operatorname{arctg}\frac{1}{2014^2+2014+1}.$$

Задание	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**Итого**
Баллы	8	8	10	10	10	10	10	10	12	12	**100**

Критерии оценивания заданий олимпиады 10 класс:

Для заданий 1, 2

$+$ - 8 баллов - полное обоснованное решение задачи.

$\pm$ - 6 баллов - арифметическая ошибка в конце решения задачи; ошибка при выписывании ответа.

$\frac{1}{2}$ - 4 баллов - получены существенные промежуточные результаты.

$\mp$ - 2 балла - получены некоторые промежуточные результаты; арифметическая ошибка допущена вначале решения, которая, при правильном ходе решения задачи, возможно, привела к неверному ответу.

$-$ - 0 баллов- решение задачи неверно.

«нет» - решение задачи отсутствует.

Аналогично, для заданий 3-8

$+$ - 10 баллов

$\pm$ - 8 баллов

$\frac{1}{2}$ - 6 баллов

$\mp$ - 2 балла

Аналогично, для заданий 9-10

$+$ - 12 баллов

$\pm$ - 9 баллов

$\frac{1}{2}$ - 6 баллов

$\mp$ - 3 балла

Решение задач (10 класс)

Задача 1. *I вариант*.

1. Петя, Вася и Толя соревнуются в беге на дистанции *AB*. Если Петя и Вася одновременно выбегут из пунктов *A* и *B* навстречу друг другу, а Толя выбежит с ними одновременно, то Толя успеет пробежать всю дистанцию до момента встречи Пети и Васи. Если Петя и Толя побегут навстречу друг другу, а Вася выбежит с ними одновременно, то Вася успеет пробежать половину дистанции до момента встречи Пети и Толи. Успеет ли Петя пробежать четверть дистанции к моменту встречи Толи и Васи, если они побегут навстречу друг другу?

Решение. Обозначим скорости Васи, Пети и Толи соответственно *x*, *y* и *z*, а всю дистанцию *AB* примем за *S*. По условию задачи составим систему неравенств

$$\begin{cases} \dfrac{S}{x+y} > \dfrac{S}{z}, \\ \dfrac{S}{y+z} > \dfrac{S}{2x}. \end{cases}$$

Требуется сравнить $\dfrac{S}{x+z} \vee \dfrac{S}{4y}$.

Из системы следует

$$\begin{cases} z > x+y, \\ 2x > y+z \end{cases} \Rightarrow \quad 2x+z > x+2y+z \quad \Leftrightarrow \quad x > 2y \qquad (1).$$

Отсюда видно, что $x+y>3y$. Значит, из первого неравенства системы $z>3y$ (2).

Из неравенств (1) и (2) видим, что $x+z>5y>4y$. Получаем, что $\dfrac{S}{x+z} < \dfrac{S}{4y}$, т.е. Петя не успеет.

Ответ: не успеет.

Задача 1. *II вариант*.

1. Саша, Дима и Коля соревнуются в беге на дистанции *AB*. Если Саша и Дима одновременно выбегут из пунктов *A* и *B* навстречу друг другу, а Коля выбежит с ними одновременно, то Коля успеет пробежать всю дистанцию до момента встречи Саши и Димы. Если Саша и Коля побегут навстречу друг другу, а Дима выбежит с ними одновременно, то Дима успеет пробежать $\frac{3}{5}$ дистанции до момента встречи Саши и Коли. Успеет ли Саша пробежать шестую часть дистанции к моменту встречи Коли и Димы, если они побегут навстречу друг другу?

Решение. Пусть скорости Саши, Димы и Коли равны соответственно x, y и z. По условию

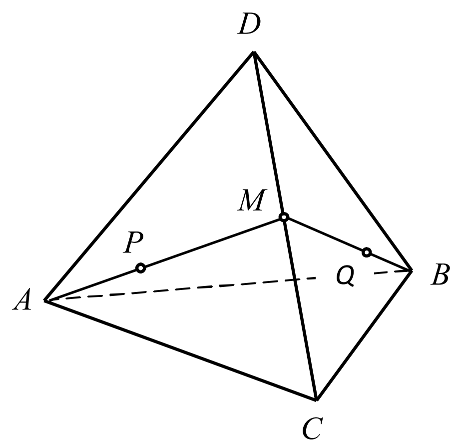
$$\begin{cases} z > x + y, \\ 5y > 3x + 3z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3z > 3x + 3y, \\ 5y > 3x + 3z \end{cases} \Rightarrow 3x + 5y > 6x + 3y + 3z \quad \Leftrightarrow \quad y > 3x \quad (1).$$

Из первого неравенства системы $z > x + y > 4x$ (2), и, значит, $y + z > 7x > 6x$. Саша не успеет.

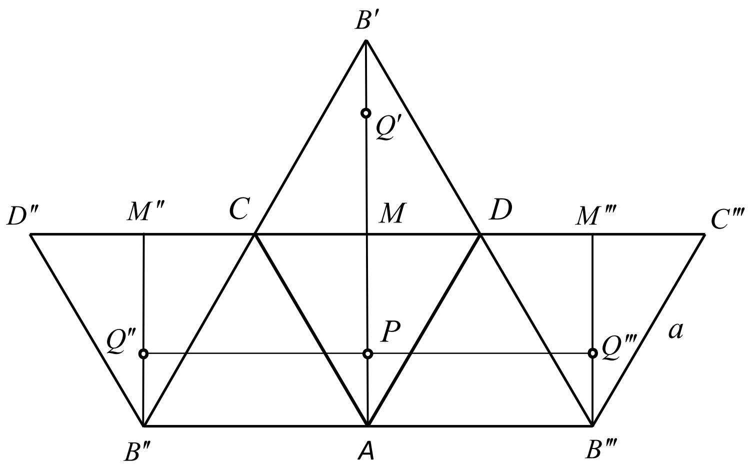
Ответ: не успеет.

Задача 2. *I вариант*.

Дан правильный тетраэдр $ABCD$ с ребром a. На медиане AM грани ACD взята точка P так, что $2|AP| = |PM|$, а на медиане BM грани BCD точка — Q так, что $2|BQ| = |QM|$. Найти длину кратчайшего пути из P в Q по поверхности тетраэдра.



Решение. Любой путь, идущий по поверхности тетраэдра, можно развернуть на плоскость.



В задаче требуется выбрать наименьший из трех отрезков PQ', PQ'' и PQ'''. Ясно, что

$$|PQ'| = \frac{4}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} a = \frac{2}{\sqrt{3}} a,$$

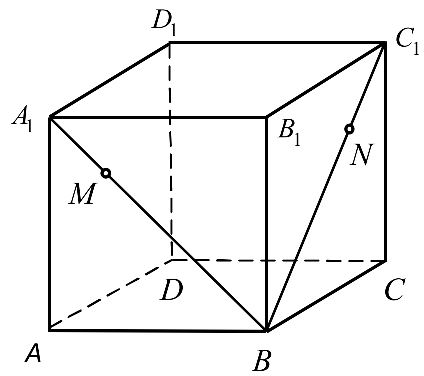
$$|PQ''| = |PQ'''| = a.$$

Кратчайший путь имеет длину a.

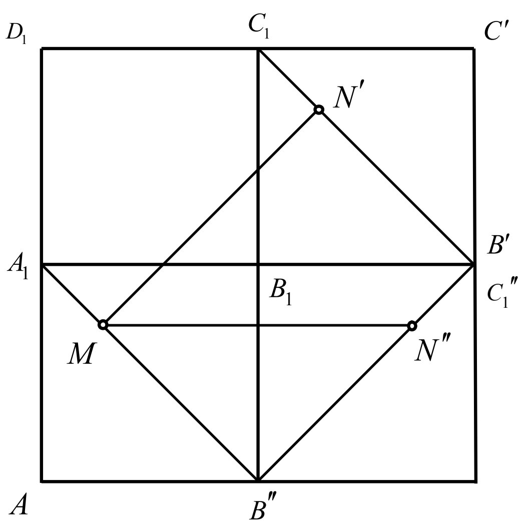
Ответ: a.

Задача 2. *II вариант*.

В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром, равным a, на диагонали боковой грани A_1B выбрана точка M так, что $A_1M : MB = 1:3$, а на диагонали BC_1 выбрана точка N так, что $BN : BC_1 = 3:4$. Найти длину кратчайшего пути из M в N по поверхности куба.



Решение. Развернём путь по поверхности куба на плоскость.



В задаче требуется выбрать наименьший из двух отрезков MN' и MN''. Легко видеть, что $|MN'| = \sqrt{2}\, a$, $|MN''| = \dfrac{3}{2} a$. Кратчайший путь имеет длину $\sqrt{2}\, a$.

Ответ: $\sqrt{2}\, a$.

Задача 3. *I вариант*.

Определить координаты точки, лежащей на графике функции $y = 4k - kx$, в которой разность квадрата абсциссы и ординаты принимает наименьшее значение. При каком значении параметра k оно достигается?

Решение. $f\left(x\right)=x^2-\left(4k-kx\right)=x^2+kx-4k=\left(x+\frac{k}{2}\right)^2-\frac{k^2}{4}-4k$.

$$\min f\left(x\right)=f\left(-\frac{k}{2}\right)=-\frac{k^2}{4}-4k=-\frac{1}{4}\left(k^2+16k\right)=-\frac{1}{4}\left(k+8\right)^2+16.$$

Видим, что $\min f\left(x\right)$ достигает своего наименьшего значения при $k=-8$. При этом $x_0=-\frac{k}{2}=4$, $y_0=0$.

Ответ: $\left(4;0\right)$; $k=-8$.

Задача 3. *II вариант*.

Определить координаты точки, лежащей на графике функции $y=-3k-kx$, в которой наименьшее значение суммы квадрата абсциссы и ординаты является максимальным. При каком значении параметра k оно достигается?

Решение. $f\left(x\right)=x^2+\left(-3k-kx\right)=x^2-kx-3k=\left(x-\frac{k}{2}\right)^2-\frac{k^2}{4}-3k$.

$$\min f\left(x\right)=f\left(\frac{k}{2}\right)=-\frac{k^2}{4}-3k=-\frac{1}{4}\left(k^2+12k\right)=-\frac{1}{4}\left(k+6\right)^2+9.$$

Наибольшее значение $\min f\left(x\right)$ принимает при $k=-6$, при этом $x_0=-3$, $y_0=0$.

Ответ: $\left(-3;0\right)$; $k=-6$.

Задача 4. *I вариант*.

Решить уравнение $\left|\operatorname{ctg}x\right|+\frac{1}{\left|\operatorname{ctg}x\right|}=\sqrt[6]{-\operatorname{tg}^2x-2\operatorname{tg}x+63}$.

Решение. Заменой $t=\operatorname{tg}x$ уравнение приводится к виду

$$\left|t\right|+\frac{1}{\left|t\right|}=\sqrt[6]{-t^2-2t+63}.$$

Замечаем, что функция $\varphi(t)=|t|+\dfrac{1}{|t|}$ ограничена снизу и принимает своё наименьшее значение, равное 2, при $t=\pm 1$. Функция $\psi(t)=\sqrt[6]{-t^2-2t+63}$ ограничена сверху, принимает наибольшее значение 2 при $t=-1$. Отсюда заключаем, что уравнение имеет единственное решение $t=-1$.

Осталось решить уравнение $\operatorname{tg} x=-1$, получаем $x=-\dfrac{\pi}{4}+\pi n, n\in\mathbb{Z}$.

Ответ: $x\in\left\{-\dfrac{\pi}{4}+\pi n \,\middle|\, n\in\mathbb{Z}\right\}$.

Задача 4. *II вариант*.

Решить уравнение $\left|\operatorname{tg} x+\dfrac{1}{\operatorname{tg} x}\right|=\sqrt[4]{-\operatorname{ctg}^2 x+2\operatorname{ctg} x+15}$.

Решение. Пусть $t=\operatorname{ctg} x$. Уравнение принимает вид:
$\left|t+\dfrac{1}{t}\right|=\sqrt[4]{-t^2+2t+15}$. Обозначим $\varphi(t)=\left|t+\dfrac{1}{t}\right|$, $\psi(t)=\sqrt[4]{-t^2+2t+15}$.

$\min\varphi(t)=\varphi(\pm 1)=2$, $\max\psi(t)=\psi(1)=2$. Следовательно, $t=1$.

Обратная замена: $\operatorname{ctg} x=1$,

$x=\dfrac{\pi}{4}+\pi n, n\in\mathbb{Z}$.

Ответ: $x\in\left\{\dfrac{\pi}{4}+\pi n \,\middle|\, n\in\mathbb{Z}\right\}$.

Задача 5. *I вариант*.

Известно, что оба корня квадратичной функции $f_1(x)=3x^2+ax+b$ больше 2014, а оба корня квадратичной функции $f_2(x)=2x^2+cx+d$ меньше 2014 ($a,b,c,d\in\mathbb{R}$). Может ли функция $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$ иметь два действительных корня, один из которых больше 2014, а другой — меньше?

Решение. Обе функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ в точке $x=2014$ имеют положительное значение, значит, положительным является и значение в этой точке их суммы $f(x)$. Ветви параболы $y = f(x)$ направлены вверх. Поэтому корни функции $f(x)$ не могут располагаться по разные стороны от числа 2014.

Ответ: нет.

Задача 5. *II вариант*.

Известно, что оба корня квадратичной функции $f_1(x) = -x^2 + mx + n$ больше 1580, а оба корня квадратичной функции $f_2(x) = -2x^2 + px + q$ меньше 1580 ($m, n, p, q \in \mathbb{R}$). Может ли функция $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ иметь два действительных корня, один из которых больше 1580, а другой — меньше?

Решение. $f_1(1580) < 0$, $f_2(1580) < 0 \Rightarrow f(1580) < 0$. Поскольку ветви параболы $y = f(x)$ направлены вниз, то корни $f(x)$ не могут располагаться по разные стороны от числа 1580.

Ответ: нет.

Задача 6. *I вариант*.

Найти все значения параметра *a*, при которых решением системы неравенств $\begin{cases} x^2 - 4x + 2a \ge 0 \\ (a-2)(x^2 - ax + 2) \ge 0 \end{cases}$ является множество всех действительных чисел.

Решение. Множество всех действительных чисел является решением первого неравенства тогда и только тогда, когда $D = 2 - a \le 0 \Leftrightarrow a \ge 2$.

1) При $a = 2$ решением второго неравенства является множество всех действительных чисел.

2) При $a > 2$ второе неравенство равносильно неравенству $x^2 - ax + 2 \ge 0$, для которого множество всех действительных чисел является решением тогда и только тогда, когда $D = a^2 - 8 \le 0 \Leftrightarrow -2\sqrt{2} \le a \le 2\sqrt{2}$.

Таким образом, множество всех действительных чисел является решением системы неравенств в случае $a \in \left[2; 2\sqrt{2}\right]$.

Ответ: $a \in \left[2; 2\sqrt{2}\right]$.

Задача 6. *II вариант*.

Найти все значения параметра *a*, при которых система неравенств $\begin{cases} (a-1)\left(2x^2+ax+1\right)>0, \\ x^2-2x+a>0 \end{cases}$ не имеет решений.

Решение. Неравенство (2) всегда имеет в составе решения бесконечный промежуток, определяемый знаком дискриминанта $(1-a)$.

При $a>1$ решением (2) является $x \in \mathbb{R}$, неравенство (1) при этом равносильно $2x^2+ax+1<0$. Решением (1) в этом случае является либо $x \in \varnothing$ при $a^2-8 \le 0$, либо $x \in \left(x_1; x_2\right)$ при $a^2-8>0$.

При $a<1$ решением (2) является совокупность расходящихся лучей, неравенство (1) при этом имеет решением либо совокупность расходящихся лучей, либо $x \in \mathbb{R}$.

При $a=1$ решением (1) является $\varnothing$.

Таким образом, отсутствию решений исходной системы удовлетворяют условия

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a>1, \\ a^2-8 \le 0; \end{cases} \\ a=1. \end{array}\right.$$

Ответ: $a \in \left[1; 2\sqrt{2}\right]$.

Задача 7. *I вариант*.

Длины катетов прямоугольного треугольника равны 3 и 4. На его гипотенузе как на стороне внешним образом построен квадрат. Найти расстояние от вершины прямого угла треугольника до центра квадрата.

Решение.

Способ 1. 1) Пусть в прямоугольном треугольнике ABC $AC = 3$, $BC = 4$, $\angle C = 90°$. Обозначим $\angle CAB = \alpha$, тогда $\sin\alpha = 4/5$, $\cos\alpha = 3/5$.

2) Пусть O — центр квадрата, построенного на гипотенузе AB. Около четырёхугольника $ABCO$ можно описать окружность, окружность с диаметром $2R = AB = 5$.

3) По теореме синусов $\dfrac{CO}{\sin\angle CAO} = 2R$, откуда $CO = 2R\sin\angle CAO = 5\sin\left(\alpha + 45°\right) = 7\sqrt{2}/2$.

Способ 2. 1) Заметим, что точки A, C, B, O лежат на одной окружности с диаметром AB, и, следовательно, $\angle AOC = \angle ABC$.

2) По теореме косинусов для треугольника AOC

$$AC^2 = AO^2 + CO^2 - 2AO\cdot CO\cos\angle AOC,$$

$$3^2 = \left(\frac{5}{\sqrt{2}}\right)^2 + CO^2 - 2\cdot 5\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot CO\cdot\frac{4}{5},$$

$$2\cdot CO^2 - 8\sqrt{2}\cdot CO + 7 = 0,$$

$CO = \dfrac{4\sqrt{2} \pm 3\sqrt{2}}{2}$. Условию задачи удовлетворяет больший корень.

Ответ: $\dfrac{7\sqrt{2}}{2}$.

Задача 7. *II вариант.*

Углы при основании равнобедренного треугольника ABC с основанием AC равны 75°. В каком отношении, считая от вершины C, высота BD делит высоту CE?

Решение.

<u>Способ 1</u>. 1) Пусть $AH = HC = a$, $\angle A = \alpha = 75°$. Тогда $CE = AC \sin\angle A = 2a\sin\alpha$.

2) Пусть $K = CE \cap BH$. $\angle CAE = \angle CKH$ как углы с взаимно перпендикулярными сторонами,

$$CK = \frac{CH}{\sin\angle CKH} = \frac{a}{\sin\alpha};$$

$$KE = CE - CK = \frac{a\left(2\sin^2\alpha - 1\right)}{\sin\alpha} = -\frac{a\cos 2\alpha}{\sin\alpha}.$$

3) $\dfrac{CK}{KE} = -\dfrac{1}{\cos 2\alpha} = \dfrac{2}{\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

<u>Способ 2</u>. 1) Обозначим $AB = BC = b$.

Тогда $CH = BC\sin\angle CBH = b\sin 15°$,

$$CK = \frac{CH}{\cos\angle HCK} = \frac{CH}{\cos 15°} = \frac{BC\sin 15°}{\cos 15°} = b\,\mathrm{tg}15°.$$

2) $BE = BC\cos 30° = b\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

3) $KE = BE\,\mathrm{tg}\angle KBE = b\dfrac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{tg}15°$.

4) $\dfrac{CK}{KE} = \dfrac{b\,\mathrm{tg}15°}{b\dfrac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{tg}15°} = \dfrac{2}{\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

Ответ: $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

Задача 8. *I вариант*.

Найти наименьшее значение выражения

$$\sqrt{(x-3)^2+(y-2)^2}+\sqrt{(x-6)^2+(y+2)^2}.$$

Решение. Рассмотрим точки $A(3;2)$, $B(6;-2)$, $C(x;y)$. Данное выражение представляет собой сумму расстояний $|AC|+|CB|$. Очевидно, эта сумма принимает наименьшее значение, равное $|AB|=5$, если точка $C\in[AB]$.

Ответ: 5.

Задача 8. *II вариант*.

Найти наибольшее значение выражения

$$\sqrt{(x+1)^2+(y+3)^2}-\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2}.$$

Решение. Рассмотрим точки $A(-1;-3)$, $B(2;1)$, $C(x;y)$. Данное выражение представляет собой разность расстояний $|AC|-|CB|$. Эта разность принимает наибольшее значение, равное $|AB|=5$, если точка С находится на прямой (AB), так что $B\in[AC]$.

Ответ: 5.

Задача 9 (вар.1)

Пусть *O* — точка пересечения медиан треугольника *ABC*, *M* — произвольная точка на окружности с центром в точке *O*. Доказать, что сумма $AM^2+BM^2+CM^2$ не зависит от выбора точки *M* на окружности.

Решение.

Заметим, что $\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OC}$. (*)

Рассмотрим сумму $AM^2+BM^2+CM^2=\left(\overrightarrow{MA}\right)^2+\left(\overrightarrow{MB}\right)^2+\left(\overrightarrow{MC}\right)^2$.

Подставим в данное равенство выражения $(*)$ и учтем, что $\left(\overrightarrow{MO}\right)^2 = R^2$ и сумма $\left(\overrightarrow{OA}\right)^2 + \left(\overrightarrow{OB}\right)^2 + \left(\overrightarrow{OC}\right)^2$ не зависит от выбора точки M на окружности. Используя известный факт, что $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{O}$, приведем оставшиеся слагаемые к виду $\overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{MO} \cdot (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = \vec{O}$.

Утверждение доказано.

Задача 9 (вар.2)

Пусть O — точка пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$, M — произвольная точка на окружности с центром в точке O. Доказать, что сумма $AM^2 + BM^2 + CM^2 + DM^2$ не зависит от выбора точки M на окружности.

Решение.

$$\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OC}.$$

$$\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OD}\ (*)$$

Имеем

$$AM^2 + BM^2 + CM^2 + DM^2 = \left(\overrightarrow{MA}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MB}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MC}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MD}\right)^2.$$

Подставим в данное равенство выражения $(*)$ и учтем, что $\left(\overrightarrow{MO}\right)^2 = R^2$ и сумма $\left(\overrightarrow{OA}\right)^2 + \left(\overrightarrow{OB}\right)^2 + \left(\overrightarrow{OC}\right)^2 + \left(\overrightarrow{OD}\right)^2$ не зависит от выбора точки M на окружности. Используя известный факт, что $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{O}$, приведем оставшиеся слагаемые к виду

$$\overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{MO} \cdot (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}) = \vec{O}$$
.

Утверждение доказано.

Задача 10. *I вариант.*

Найти сумму: $\frac{\pi}{4}+\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\operatorname{arctg}\frac{1}{7}+\operatorname{arctg}\frac{1}{13}+\ldots+$

$+\operatorname{arctg}\frac{1}{n^2-n+1}+\ldots+\operatorname{arctg}\frac{1}{2014^2-2014+1}.$

Решение.

Воспользуемся формулой разности арктангенсов:

$$\operatorname{arctg}x-\operatorname{arctg}y=\operatorname{arctg}\frac{x-y}{1+xy},\ xy>-1.$$

Имеем:

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{n^2-n+1}=\operatorname{arctg}\frac{n-(n-1)}{1+n(n-1)}=\operatorname{arctg}n-\operatorname{arctg}(n-1).$$

Тогда искомая сумма принимает вид:

$$(\operatorname{arctg}1-\operatorname{arctg}0)+(\operatorname{arctg}2-\operatorname{arctg}1)+(\operatorname{arctg}3-\operatorname{arctg}2)+$$

$$+\ldots+(\operatorname{arctg}2014-\operatorname{arctg}2013)=\operatorname{arctg}2014.$$

Ответ: $\operatorname{arctg}2014$.

Задача 10. *II вариант.*

Найти сумму: $\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\operatorname{arctg}\frac{1}{7}+\operatorname{arctg}\frac{1}{13}+\ldots+$

$+\operatorname{arctg}\frac{1}{n^2+n+1}+\ldots+\operatorname{arctg}\frac{1}{2014^2+2014+1}.$

Решение.

Воспользуемся формулой разности арктангенсов:

$$\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} \frac{x-y}{1+xy}, \ xy > -1.$$

Имеем:

$$\operatorname{arctg} \frac{1}{n^2+n+1} = \operatorname{arctg} \frac{(n+1)-n}{1+n(n+1)} = \operatorname{arctg}(n+1) - \operatorname{arctg} n.$$

Искомая сумма принимает вид:

$$(\operatorname{arctg} 2 - \operatorname{arctg} 1) + (\operatorname{arctg} 3 - \operatorname{arctg} 2) + (\operatorname{arctg} 4 - \operatorname{arctg} 3) +$$

$$+ \ldots + (\operatorname{arctg} 2015 - \operatorname{arctg} 2014) = \operatorname{arctg} 2015 - \operatorname{arctg} 1 =$$

$$= \operatorname{arctg} \frac{2014}{2016} = \operatorname{arctg} \frac{1007}{1008}.$$

Ответ: $\operatorname{arctg} 2015 - \frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg} \frac{1007}{1008}$.