МГТУ им. Н.Э.Баумана
Олимпиада школьников «Шаг в будущее»
10 класс, 1 тур 2013-2014 учебного года.

Задача 1. Вычислите без помощи калькулятора $\sqrt{2007\cdot 2009\cdot 2011\cdot 2013+16}$

Задача 2. Действительные числа x, y, a таковы, что $x+y=a+1$ и $xy=a^2-7a+16$. При каком значении параметра a сумма x^2+y^2 принимает наибольшее значение?

Задача 3. Даны четыре отрезка с длинами a, b, c, d. При помощи циркуля и линейки постройте отрезок длины $\sqrt{ab+cd}$.

Задача 4. Найдите наименьшее значение выражения

$$\sqrt{p^2+1}+\sqrt{(q-p)^2+1}+\sqrt{(r-q)^2+1}+\sqrt{(s-r)^2+1}+\sqrt{(12-s)^2+1}$$

Задача 5. Пусть x и y удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} 2|x|+|y|\geq 12, \\ |x+10|+2|y|\leq 12, \\ 5x+y^2+35\geq 0. \end{cases}$$

Какие значения может принимать выражение $\dfrac{1}{x^2+y^2}$?

Задача 6. Докажите, что любую треугольную призму с достаточно большой высотой можно пересечь плоскостью так, чтобы в сечении её боковой поверхности получился равносторонний треугольник.

Решения заданий 10-го класса

Задача 1. Вычислите без помощи калькулятора $\sqrt{2007\cdot 2009\cdot 2011\cdot 2013+16}$.

Решение. Пусть 2010=a, тогда

$$\sqrt{2007\cdot 2009\cdot 2011\cdot 2013+16}=$$
$$\sqrt{(a-3)(a-1)(a+1)(a-3)+16}=\sqrt{(a^2-9)(a^2-1)+16}=\sqrt{a^4-10a^2+25}=$$
$$\sqrt{(a^2-5)^2}=|a^2-5|=|2010^2-5|=4040095.$$

Ответ: 4040095.

Задача 2. Действительные числа *x*, *y*, *a* таковы, что $x+y=a+1$ и $xy=a^2-7a+16$. При каком значении параметра a сумма x^2+y^2 принимает наибольшее значение?

Решение. Выразим x^2+y^2 через $x+y$ и xy:

$$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=(a+1)^2-2\left(a^2-7a+16\right)=$$

$$=-a^2+16a-31=-(a-8)^2+33.$$

Полученное выражение, очевидно, принимает свое наибольшее значение при $a=8$.

Для ответа на вопрос задачи необходимо ещё учесть условие существования действительных чисел *x* и *y*, удовлетворяющих двум данным в условии уравнениям. Решая систему данных уравнений, например, относительно *x*, приходим к квадратному уравнению $x^2-(a+1)x+a^2-7a+16=0$.

Требование неотрицательности его дискриминанта приводит к ограничениям на значения параметра *a*:

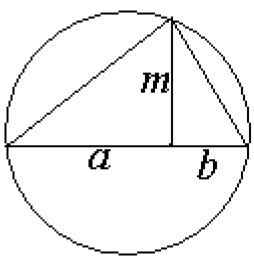
$(a+1)^2-4\left(a^2-7a+16\right)\geq 0$, или $-3a^2+30a-63\geq 0$, отсюда $3\leq a\leq 7$.

На промежутке [3; 7] функция $f(a)=-(a-8)^2+33$ возрастает, и поэтому её наибольшее значение достигается при $a=7$.

Ответ: 7.

Задача 3. Даны четыре отрезка с длинами a, b, c, d. При помощи циркуля и линейки постройте отрезок длины $\sqrt{ab+cd}$.

Решение.



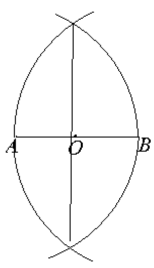


Рис.1

Пользуясь известными приемами построения окружности по ее диаметру и построения прямого угла (см. рис.1), построим отрезок длиной $m=\sqrt{ab}$ и, аналогичным образом, отрезок длиной $n=\sqrt{cd}$. Затем построим прямоугольный треугольник с катетами m, n. Его гипотенуза будет иметь длину $\sqrt{ab+cd}$.

Задача 4. Найдите наименьшее значение выражения

$$\sqrt{p^2+1}+\sqrt{(q-p)^2+1}+\sqrt{(r-q)^2+1}+\sqrt{(s-r)^2+1}+\sqrt{(12-s)^2+1}$$

Решение. Рассмотрим на координатной плоскости точки $O(0;0)$, $P(1;p)$, $Q(2;q)$, $R(3;r)$, $S(4;s)$, $T(5;12)$. Данное выражение геометрически представляет собой сумму расстояний $|OP|+|PQ|+|QR|+|RS|+|ST|$. Очевидно, значение этой суммы минимально и равно $|OT|=13$, если $P,Q,R,S\in[OT]$.

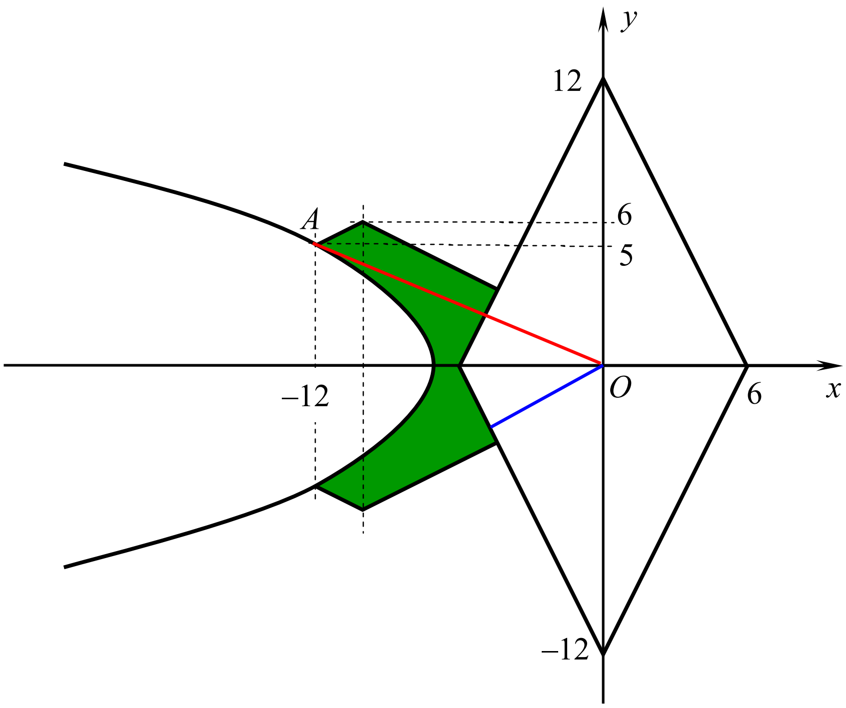
Ответ: 13.

Задача 5. Пусть x и y удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} 2|x|+|y|\geq 12, \\ |x+10|+2|y|\leq 12, \\ 5x+y^2+35\geq 0. \end{cases}$$

Какие значения может принимать выражение $\dfrac{1}{x^2+y^2}$?

Решение. Построим в координатной плоскости область, задаваемую данной системой. Первое неравенство описывает все точки плоскости за исключением внутренних точек ромба с координатами вершин $(-6;0)$, $(0;12)$, $(6;0)$, $(0;-12)$. Второе неравенство — точки плоскости, ограниченные ромбом с координатами вершин $(-22;0)$, $(-10;6)$, $(2;0)$, $(-10;-6)$. Третье неравенство — внешнюю область параболы $x=-\dfrac{1}{5}y^2-7$. Область пересечения графиков всех трёх неравенств показана на рисунке.



Выражение $\dfrac{1}{x^2+y^2}$ задаёт величину, обратную квадрату расстояния до начала координат. Своё наименьшее значение оно принимает в точках

$A(-12;5)$ и $A'(-12;-5)$ — там, где расстояние до начала координат наибольшее. Наибольшее значение данное выражение достигает в точках области, ближайших к началу координат; ими служат основания перпендикуляров, опущенных из начала координат на соответствующие стороны ромба, определяемого первым неравенством.

Ответ: $\left[\frac{1}{169};\frac{5}{144}\right]$.

Задача 6. Докажите, что любую треугольную призму с достаточно большой высотой можно пересечь плоскостью так, чтобы в сечении её боковой поверхности получился равносторонний треугольник.

Решение.

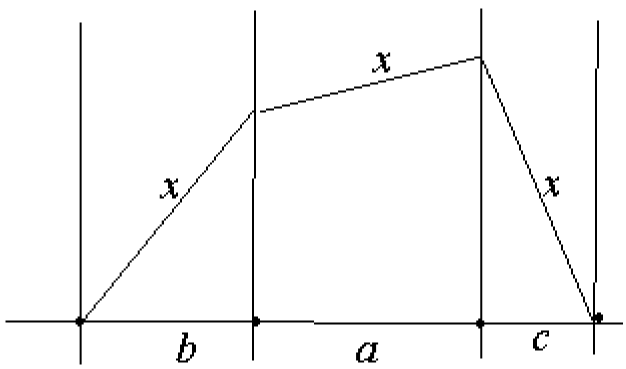


Рис.2

Рассмотрим развертку боковой поверхности призмы. Существование нужного сечения эквивалентно существованию некоторой ломаной с вершинами на четырех параллельных прямых развертки. Все три звена ломаной должны иметь одинаковую длину, а концы – лежать на прямой, перпендикулярной этим прямым (см.рис.2).

Исходя из геометрии задачи, требуется доказать, что уравнение $\sqrt{x^2-a^2}+\sqrt{x^2-b^2}=\sqrt{x^2-c^2}$ имеет решение при $a\ge b\ge c>0$. В правой части уравнения и в левой части стоят возрастающие непрерывные по x функции. Обозначим их соответственно $f(x)$ и $\varphi(x)$. Нетрудно показать, что $f(a)<\varphi(a)$, и $f(a+b)>\varphi(a+b)$, то есть на промежутке $(a;a+b)$ данное уравнение имеет решение.

Критерии проверки заданий 10-го класса

Задача 1.

Баллы	
15	Обоснованное и грамотно выполненное решение задачи. Правильный ответ представлен в любом виде.
10	Получен правильный ответ без указания модуля числа при извлечении корня из полного квадрата.
0	Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям.

Задача 2.

Баллы	
15	Обоснованное и грамотно выполненное решение задачи.
5	Решение не учитывает условие существования действительных чисел x и y, удовлетворяющих двум данным в условии уравнениям.
0	Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям.

Задача 3.

Баллы	
15	Обоснованное и грамотно выполненное решение задачи.
10	Ни на одном этапе решения не указывается, как при помощи циркуля и линейки построить прямой угол.
0	Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям.

Задача 4.

Баллы	
15	Обоснованное и грамотно выполненное решение задачи.
0	Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям.

Задача 5.

Баллы	
20	Обоснованное и грамотно выполненное решение задачи.
15	Верно показаны области решений по каждому неравенству системы, но окончательный вывод неверен.
10	Верно показаны области решений по двум неравенствам системы, неверно найдена область решений третьего неравенства и системы в целом.
5	Верно показана области решений лишь по одному неравенству системы, окончательный вывод неверен.
0	Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям.

Задача 6.

Баллы	
20	Обоснованное и грамотно выполненное решение задачи.

10	Построена развертка пирамиды, составлено уравнение для нахождения стороны равностороннего треугольника, но не доказано существование решения этого уравнения.
5	Построена развертка призмы. Уравнение для нахождения стороны правильного треугольника не составлено. Ответ «да».
0	Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям.