

**ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»
Центр довузовской подготовки**

**ПРЕДПРОФЕССИОНАЛЬНЫЙ ЭКЗАМЕН
для учащихся инженерных классов (11 класс) города Москвы**

**Мастер-класс «Решение задач по информатике теоретической части
предпрофессионального экзамена»**

Автор: Калмыков Ю.В., старший преподаватель кафедры «Основы математики и информатики» СУНЦ МГТУ им. Н.Э. Баумана, председатель методического объединения учителей информатики ГБОУ Лицей №1580

Москва 2017

СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ

Правило перевода из произвольной системы счисления в десятичную

Для того, чтобы перевести число из произвольной системы счисления в десятичную систему счисления, нужно сложить все произведения каждой цифры числа на основание системы счисления в степени соответствующего разряда.

Пример

$$1101_2 = 1 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^3 = 1 + 0 + 4 + 8 = 13_{10}$$

Правило перевода целого числа из десятичной системы счисления в произвольную:

1. Последовательно делим данное число и получаемые целые частные (выраженные цифрами десятичной системы) на основание новой системы счисления до тех пор, пока частное не станет равным нулю.
2. Полученные остатки, являющиеся цифрами числа в новой системе счисления, выражаем цифрами алфавита этой системы.
3. Составляем число в новой системе счисления, записав полученные остатки в обратной последовательности (т.е. начиная с последнего остатка).

Пример 1.

Перевести число 173_{10} в восьмеричную систему счисления.

The image shows a handwritten conversion of the decimal number 173 to octal using the division method. The process is as follows:

173	8		
168	21	8	
5	16	2	8
	5	0	0
		2	

An arrow points from the final remainder '2' to the first remainder '5', indicating that the remainders are read from bottom to top to form the octal number 255.

Ответ: 255_8

Можно записать по-другому.

173	8	5	↑
21	8	5	
2	8	2	
0			

Ответ: 255_8

Пример 2.

Перевести число 173_{10} в шестнадцатеричную систему счисления.

$$\begin{array}{r|l} 173 & 16 \\ \hline 160 & 10 \\ \hline 13 & \end{array}$$

Пример 2.

Перевести число 173_{10} в шестнадцатеричную систему счисления.

$$\begin{array}{r|l} 173 & 16 \\ \hline 160 & 10 \\ \hline \cancel{13} & \mathbf{D} \end{array}$$

Пример 2.

Перевести число 173_{10} в шестнадцатеричную систему счисления.

173	16	
160	10	16
<hr/>	0	0
D		
	<hr/>	
	10	

Пример 2.

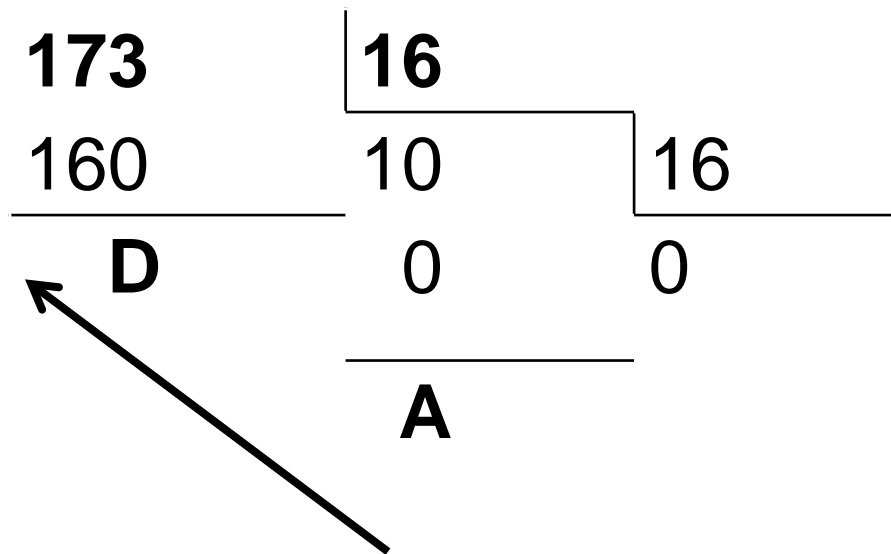
Перевести число 173_{10} в шестнадцатеричную систему счисления

173	16	
160	10	16
<hr/>	0	0
D	0	
	<hr/>	
	10	A

Пример 2.

Перевести число 173_{10} в шестнадцатеричную систему счисления

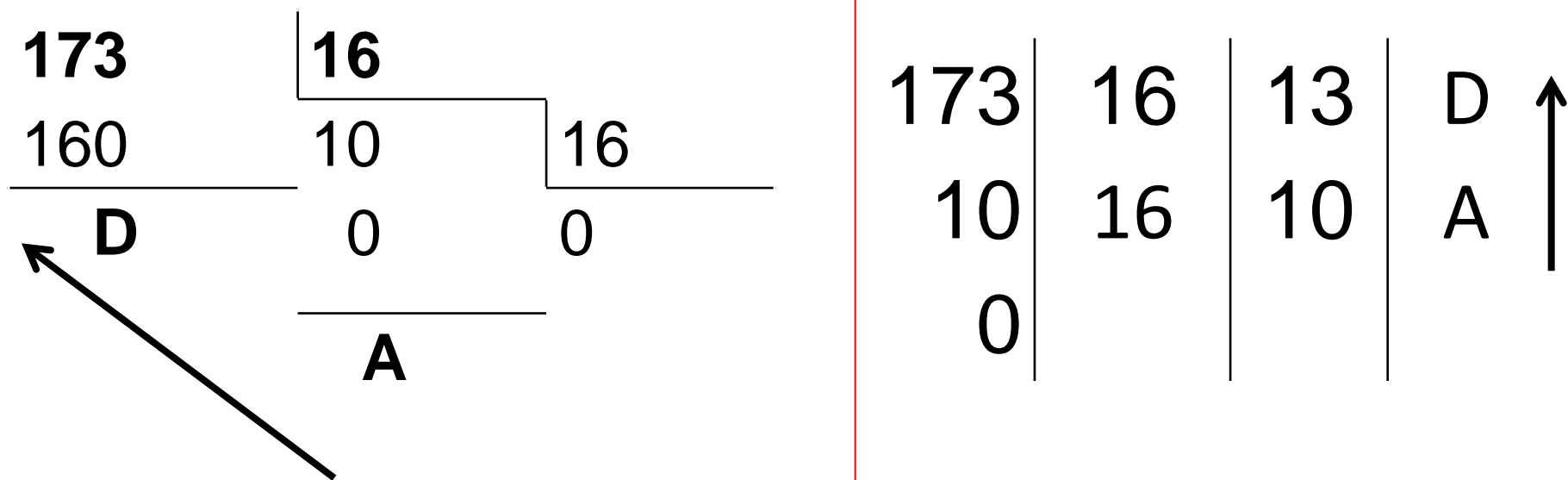
173	16	
160	10	16
<hr/>	0	0
D	<hr/>	
	A	



Ответ: AD_{16}

Пример 2.

Перевести число 173_{10} в шестнадцатеричную систему счисления



Ответ: AD_{16}

Для перевода числа из десятичной системы счисления в двоичную существует еще один способ.

При этом способе надо десятичное число представить суммой чисел, которые являются степенями двойки. Если число есть в сумме, то на место соответствующего разряда в двоичной записи поставить 1, иначе поставить 0.

$2^0 = 1$	$2^3 = 8$	$2^6 = 64$	$2^9 = 512$
$2^1 = 2$	$2^4 = 16$	$2^7 = 128$	$2^{10} = 1024$
$2^2 = 4$	$2^5 = 32$	$2^8 = 256$	

Пример 4.

Перевести число 173_{10} в двоичную систему счисления.

128	64	32	16	8	4	2	1
2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0

$$173 = 128 + 45$$

Пример 4.

Перевести число 173_{10} в двоичную систему счисления.

128	64	32	16	8	4	2	1
2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
1							

$$173 = 128 + 45$$

Пример 4.

Перевести число 173_{10} в двоичную систему счисления.

128	64	32	16	8	4	2	1
2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
1	0	1	0				

$$173 = 128 + 45 = 128 + 32 + 13$$

Пример 4.

Перевести число 173_{10} в двоичную систему счисления.

128	64	32	16	8	4	2	1
2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
1	0	1	0	1	1	0	1

$$\begin{aligned} 173_{10} &= 128 + 45 = 128 + 32 + 13 = \\ &= 128 + 32 + 8 + 4 + 1 = 10101101_2 \end{aligned}$$

Если число близко к степени 2

Пример 5

Перевести число 517 в двоичную систему счисления

Решение

- $517 = 512 + 5$
- $512 = 2^9 = 1000000000_2$
- $5 = 101_2$
- Соответственно, при сложении единицы добавятся в нулевой и второй разряд
- Получим 1000000101_2

Если число близко к степени 2

Пример 6

Перевести число 507 в двоичную систему счисления

Решение

- $507 = 512 - 1 - 4$
- $512 = 2^9 = 1000000000_2$
- $512 - 1 = 2^9 - 1 = 111111111_2$
- $4 = 100_2$
- Соответственно, при вычитании единица удалится из второго разряда
- Получим 111111011_2

Родственные системы счисления

Системы счисления называют родственными, когда их основания являются степенями одного числа. Например, 2, 4, 8, 16.

10	2	4	8	16
0	0000	000	00	0
1	0001	001	01	1
2	0010	002	02	2
3	0011	003	03	3
4	0100	010	04	4
5	0101	011	05	5
6	0110	012	06	6
7	0111	013	07	7
8	1000	020	10	8
9	1001	021	11	9
10	1010	022	12	A
11	1011	023	13	B
12	1100	030	14	C
13	1101	031	15	D
14	1110	032	16	E
15	1111	033	17	F

- Для перевода из двоичной системы следует разбить число на двойки (4-я), тройки (8-я) или четвёрки чисел (16-я), а затем подменить на соответствующие значения.
- $110100101_2 = 01.10.10.01.01 = 12211_4$
- $110100101_2 = 110.100.101 = 645_8$
- $110100101_2 = 0001.1010.0101 = 1A5_{16}$
- Переход из одной родственной системы в другую осуществляется транзитом через наименьшее основание, в нашем случае через двойку

- Понятно, что все эти рассуждения применимы и для систем счисления
- 3, 9, 21, 81
- 5, 25, 125
- и т.п.

Пример из демонстрационного варианта

- Играя в интерактивный квест, команда должна была открыть сейф с цифровым кодовым замком. Найдя подсказки, команда выяснила, что кодом является минимальное нечётное четырёхзначное число в девятеричной системе счисления, троичная запись которого содержит одну двойку и три значащих нуля. Команда справилась с заданием. Какое значение кода она получила? Ответ приведите в троичной и девятеричной системах счисления.

- Очевидно, что здесь родственные системы 3-я и 9-я.
- Так как число четырёхзначное в девятеричной системе счисления, то в троичное его можно представить в виде
- $ab\ cd\ ef\ gh$
- Так как число должно быть минимальным, то нули должны располагаться как можно левее, а двойка правее (но не забыть, что число - нечётное).
- $1\ 00\ 01\ 12_3$

Соответственно, если необходимо найти максимальное число, то наоборот минимальные цифры смещаем вправо, а максимальные – влево.

Признаки чётности в различных системах счисления

- В системах счисления с **чётным** основанием чётными являются числа, **последняя цифра** которых делится на 2 без остатка
- В системах счисления с **нечётным** основанием чётными являются числа, **сумма цифр** которых делится на 2 без остатка

Задачи на множества

Круги Эйлера

Задачи на множества

Круги Эйлера

Пример 1

Каждая семья из нашего дома выписывает газету или журнал, или и то и другое. 27 семей выписывают журналы, 75 семей – газеты. Лишь 13 семей и журналы, и газеты.

Сколько семей в доме?

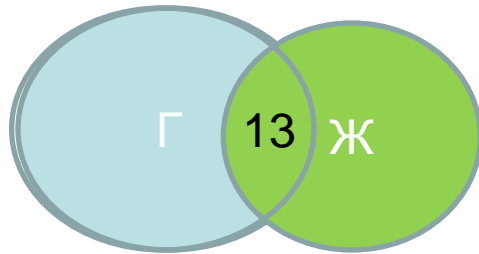
Задачи на множества

Круги Эйлера

Пример 1

Каждая семья из нашего дома выписывает газету или журнал, или и то и другое. 27 семей выписывают журналы, 75 семей – газеты. Лишь 13 семей и журналы, и газеты.

Сколько семей в доме?



$$Г=75, Ж=27$$

$$\text{Только газеты} = 75 - 13 = 62$$

$$\text{Только журналы} = 27 - 13 = 14$$

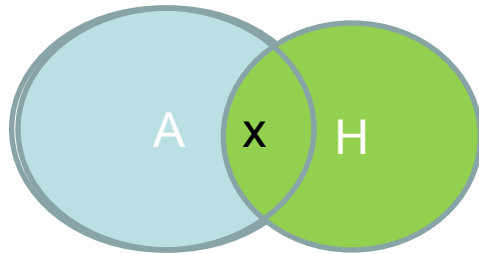
$$\text{Всего } 62 + 14 + 13 = 89 \text{ семей}$$

Пример 2 (из демонстрационного варианта)

Поток из 100 студентов сдавал экзамены. 85 студентов сдали английский язык, 73 студента сдали немецкий язык, 10 студентов не сдали ни одного экзамена. Какое количество студентов сдало экзамены и по английскому, и по немецкому языкам?

Решение

Похоже на предыдущую задачу



$A=85$, $H=27$. Так как 10 не сдавало, то всего сдавало $100-10=90$

Только английский = $85-x$

Только немецкий = $73-x$

Всего $(85-x)+(73-x)+x=90 \Rightarrow 158-x=90$

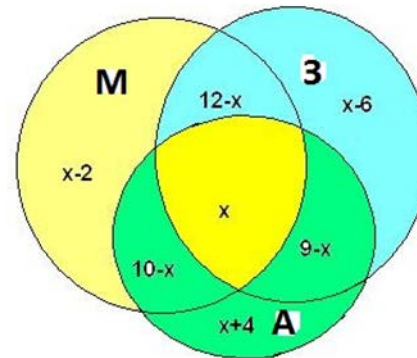
Ответ $x=68$

Пример 3

В классе 30 человек. 20 из них коллекционируют марки, 15 — значки, 23 — автографы, 10 — и марки, и автографы, 12 — и марки, и значки, 9 — и автографы, и значки. Сколько человек коллекционируют и марки, и значки, и автографы?

Решение

Для решения воспользуемся кругами Эйлера:



Пусть x человек коллекционируют и марки, и значки, и автографы. Тогда коллекционируют

только марки и автографы — $(10 - x)$ человек,

только значки и автографы — $(9 - x)$ человек,

только марки и значки — $(12 - x)$ человек.

Найдём, сколько человек коллекционируют только марки:

$$20 - (12 - x) - (10 - x) - x = x - 2$$

Аналогично получаем: $x - 6$ — только значки и $x + 4$ — только автографы, так как всего 30 человек, составляем уравнение:

$$x + (12 - x) + (9 - x) + (10 - x) + (x + 4) + (x - 2) + (x - 6) = 30.$$

Отсюда $x = 3$.

Вероятностный подход к определению количества информации

За единицу измерения информации принимается уменьшение неопределённости знаний человека в 2 раза.

Эта единица называется битом и является минимальной единицей информации.

Существует формула, которая связывает между собой количество возможных событий и количество информации.

$$N = 2^I, \text{ где}$$

N — количество возможных вариантов,
 I — количество информации.

Если из этой формулы выразить количество информации, то получится $I = \log_2 N$.

Неравновероятные события

В жизни же мы сталкиваемся не только с равновероятными событиями, но и событиями, которые имеют разную вероятность реализации.

Например:

Если в мешке лежат 20 белых шаров и 5 черных, то вероятность достать чёрный шар меньше, чем вероятность вытаскивания белого.

Как вычислить количество информации в сообщении о таком событии?

Для этого необходимо использовать следующую формулу:

$$I = \log_2 \frac{1}{p} = -\log_2 p$$

где

I – количество информации,

p - вероятность события.

Пример 1

- В корзине лежат 8 мячей разного цвета (красный, синий, желтый, зеленый, оранжевый, фиолетовый, белый, коричневый). Какое количество информации несет в себе сообщение о том, что из корзины будет вынут мяч красного цвета?
- *Решение.*
- Так как возможности вынуть мяч каждого из возможных цветов равновероятны, то для определения количества информации, содержащегося в сообщении о выпадении мяча красного цвета, воспользуемся формулой $I = \log_2 N$.
- Имеем $I = \log_2 8 = 3$ бита.
- *Ответ:* 3 бита.

Пример 2

- В корзине лежат 8 черных шаров и 24 белых. Сколько информации несёт сообщение о том, что достали чёрный шар?
- Решение:
- $8+24=32$ – общее количество шаров в корзине;
- $8/32 = 0,25$ – вероятность того, что из корзины достали чёрный шар;
- $I = -\log_2 0,25 = -(-2) = 2$ бита.

- Ответ: 2 бита

Информационная энтропия

- В кибернетике используется понятие информационной энтропии, которая определяется формулой

$$H = - \sum_i p_i \log_2 p_i$$

- где H - информационная энтропия,
 p_i - вероятность каждого из возможных исходов.

Пример из демонстрационного варианта

- В корзине лежат 32 клубка шерсти, из них 16 красных, 8 синих и 8 зелёных. Какова информационная энтропия сообщения о том, что случайно выбран 1 клубок? Какова вероятность того, что клубок оказался синим? Сколько бит информации несёт сообщение о том, что клубок синий?
- Решение
- Вероятность $8/32=1/4=0,25$
- Кол-во информации $\log_2 \frac{1}{0,25} = 2$
- Информационная энтропия
- $16/32 * \log_2(16/32) + 8/32 * \log_2(8/32) + 8/32 * \log_2(8/32) = 1/2 + 1/2 + 1/2 = 1,5$

Задачи на перемещение

- Пример из демонстрационного варианта
- Студент написал программу, в которой исполнитель **Прыгун** может совершать прыжки двух типов. Так, стартовав из точки $A(1; 6; 3)$ прыжком первого типа, **Прыгун** попадает в точку $B(1; 2; -3)$, а из точки B прыжком второго типа попадает в точку $C(1; 0; -7)$. Найдите модуль перемещения **Прыгуна**, последовательно совершившего два прыжка первого типа и прыжок, противоположный прыжку второго типа.

Решение

- A (1; 6; 3)
- B (1; 2; - 3)
- C (1; 0; - 7)
- Прыжок первого типа (0;-4;-6)
- Прыжок второго типа (0;-2;-4)
- После двух прыжков первого типа и одного обратного прыжку второго получаем
- $(0; -4*2 -(-2); -6*2 - (-4)) = (0;-6;-8)$
- Квадрат перемещения = $6^2+8^2=36+64=100$
- Отсюда – перемещение равно 10

Прочие задачи

Пример из демонстрационного варианта

Космический зонд выведен на околоземную орбиту. Он регистрирует количество высокоэнергетических протонов в околоземном пространстве, попадающих на его датчики, путём добавления в память сумматора зарегистрированного количества протонов каждую секунду. Каждый час, начиная с 01.00, передаёт это количество на Землю в Центр Управления Полётом. За 1 января 2017 года ЦУП от спутника получил следующий набор данных: 20512, 20612, 20662, 20692, 20699, 20753, 20756, 20759, 20766, 20777, 20777, 20781, 20789, 20790, 20811, 20812, 20819, 20821, 20832, 20835, 20842, 20849, 20853, 20891. Сколько частиц зарегистрировал спутник за период времени с 6 утра до 6 вечера включительно 1 января 2017?

Решение

На начало 6-го часа было зарегистрировано 20753 частиц, на конец 18-го часа, то есть в 19 часов – 20832 частиц
 $20832 - 20753 = 79$ частиц

Ответ 79