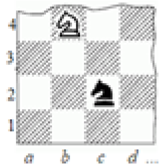
Заключительный этап академического соревнования Олимпиады школьников

«Шаг в будущее» по образовательному предмету «Математика»

Типовой вариант задания для 10 класса

1. Сколькими способами можно расставить на шахматной доске, состоящей из 16×16 клеток двух коней – белого и черного так, чтобы они угрожали друг другу? (Конь ходит буквой «Г», т.е. он может пойти на одно из полей, ближайших к тому, на котором он стоит, но не на той же самой горизонтали, вертикали или диагонали.) (12 баллов)



2. Васе и Пете, участвующим в школьной спортивно-развлекательной игре, необходимо, имея на двоих лишь одну пару роликов, как можно быстрее преодолеть дистанцию в 3 км. Они стартуют одновременно, один просто бежит, другой бежит на роликах. В любой момент времени бегущий на роликах может оставить их своему товарищу и продолжить бег без них. Такой обмен можно провести сколько угодно раз. Найдите минимальное время прохождения дистанции друзьями (определяется по последнему прибежавшему), если скорости Васи при простом беге и беге на роликах равны 4 км/ч и 8 км/ч, а Пети – 5 км/ч и 10 км/ч. Считать, что при переходе на ролики и обратно время не теряется. (12 баллов)

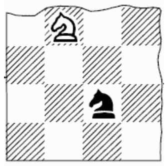
3. Найдите наименьшее натуральное число, имеющее ровно 70 натуральных делителей (включая единицу и само число). (16 баллов)

4. Решите неравенство $\left(3x+4-2\sqrt{2x^2+7x+3}\right)\left(\left|x^2-4x+2\right|-\left|x-2\right|\right)\le 0.$ (20 баллов)

5. Укажите все значения a, при которых система уравнений $3(x-a)^2+y=2-a,$ $y^2+\left(\dfrac{x-2}{|x|-2}\right)^2=1$ имеет хотя бы одно решение, и решите ее при каждом a. (20 баллов)

6. Две окружности касаются друг друга и сторон треугольника ABC. Первая окружность радиуса $\dfrac{1}{18}$ касается сторон AB и AC в точках L и K, вторая окружность радиуса $\dfrac{2}{9}$ касается сторон AC и BC в точках N и M. Найдите площадь треугольника ABC, если $AL=\dfrac{1}{9}$, $CM=\dfrac{1}{6}$. (20 баллов)

Решения типового варианта заключительного тура (10 класс)



1. Сколькими способами можно расставить на шахматной доске, состоящей из 16×16 клеток двух коней – белого и черного так, чтобы они угрожали друг другу? (Конь ходит буквой «Г», т.е. он может пойти на одно из полей, ближайших к тому, на котором он стоит, но не на той же самой горизонтали, вертикали или диагонали.) (12 баллов)

Решение: Свяжем с доской $n\times n$ $(n>2)$ прямоугольную систему координат. Обозначим координаты двух коней через $(x_1;\,y_1)$ и $(x_2;\,y_2)$, где $x_k,\,y_k\in\{1,2,\ldots,n\}$, $k=1,2$. Кони угрожают друг другу, если 1) $|x_1-x_2|=1$, $|y_1-y_2|=2$ или 2) $|x_1-x_2|=2$, $|y_1-y_2|=1$. В первом случае есть четыре такие возможности:

$1\le x_1\le n-1,\ x_2=x_1+1,\quad 1\le y_1\le n-2,\ y_2=y_1+2;$

$1\le x_1\le n-1,\ x_2=x_1+1,\quad 1\le y_2\le n-2,\ y_1=y_2+2;$

$1\le x_2\le n-1,\ x_1=x_2+1,\quad 1\le y_1\le n-2,\ y_2=y_1+2;$

$1\le x_2\le n-1,\ x_1=x_2+1,\quad 1\le y_2\le n-2,\ y_1=y_2+2.$

Каждому из этих подслучаев соответствуют по $(n-1)(n-2)$ позиции. Второй случай отличается от первого поворотом на 90°. При $n=16$ имеем $8(n-1)(n-2)=8\cdot15\cdot14=1680$.

Ответ: 1680 .

2. Васе и Пете, участвующим в школьной спортивно-развлекательной игре, необходимо, имея на двоих лишь одну пару роликов, как можно быстрее преодолеть дистанцию в 3 км. Они стартуют одновременно, один просто бежит, другой бежит на роликах. В любой момент времени бегущий на роликах может оставить их своему товарищу и продолжить бег без них. Такой обмен можно провести сколько угодно раз. Найдите минимальное время прохождения дистанции друзьями (определяется по последнему прибежавшему), если скорости Васи при простом беге и беге на роликах равны 4 км/ч и 8 км/ч, а Пети – 5 км/ч и 10 км/ч. Считать, что при переходе на ролики и обратно время не теряется. (12 баллов)

Решение: Вся дистанция делится на несколько этапов, которые один из школьников бежит без роликов, другой на роликах. Пусть x – сумма длин этапов, которые Вася пробегает на роликах, t_1 – время, затраченное им на пробег всей дистанции, а t_2 – время, которое затрачивает Петя на пробег всей дистанции, тогда $t_1=\dfrac{x}{8}+\dfrac{3-x}{4}=\dfrac{6-x}{8}$ и $t_2=\dfrac{3-x}{10}+\dfrac{x}{5}=\dfrac{3+x}{10}$. Отметим, что функция $t_1(x)$ убывающая, а функция $t_2(x)$ возрастающая. Укажем значение x, при котором $t_1=t_2$, то есть, бегуны закончили бы пробег одновременно. Из $\dfrac{6-x}{8}=\dfrac{3+x}{10}\Rightarrow x=2,\ t_1=t_2=\dfrac{1}{2}$ часа. Если $x<2$, то $t_1(x)>\dfrac{1}{2}>t_2(x)$, если $x>2$, то $t_1(x)<\dfrac{1}{2}<t_2(x)$. Следовательно, минимальное время прохождения дистанции друзьями (по последнему прибежавшему), равно 0,5 часа. **Ответ:** 0,5 *ч.*

3. Найдите наименьшее натуральное число, имеющее ровно 70 натуральных делителей (включая единицу и само число). (16 баллов)

Решение: Пусть n – искомое натуральное число, $n=p_1^{k_1}\cdot p_2^{k_2}\cdot\ldots\cdot p_m^{k_m}$ - разложение числа n на простые сомножители. Любой натуральный делитель этого числа имеет вид $d=p_1^{l_1}\cdot p_2^{l_2}\cdot\ldots\cdot p_m^{l_m}$, где $l_i\in\{0,1,\ldots,k_i\}$, $i=1,\ldots,m.$ Число делителей числа n равно $(k_1+1)(k_2+1)\cdots(k_m+1)=70.$ Разложим число 70 на неединичные сомножители всеми

Решения типового варианта заключительного тура (10 класс)

возможными способами и выберем наименьшее число n. Поскольку $70 = 2 \cdot 5 \cdot 7$, то имеем пять случаев:

1) $70 = 70$, наименьшее число $n = 2^{69} > 40000$;
2) $70 = 35 \cdot 2$, наименьшее число $n = 2^{34} \cdot 3^1 > 40000$;
3) $70 = 14 \cdot 5$, наименьшее число $n = 2^{13} \cdot 3^4 > 40000$;
4) $70 = 10 \cdot 7$, наименьшее число $n = 2^9 \cdot 3^6 = 512 \cdot 81 > 40000$;
5) $70 = 7 \cdot 5 \cdot 2$, наименьшее число $n = 2^6 \cdot 3^4 \cdot 5^1 = 25920$.

Ответ: 25920.

4. Решите неравенство $\left(3x + 4 - 2\sqrt{2x^2 + 7x + 3}\right)\left(\left|x^2 - 4x + 2\right| - |x - 2|\right) \le 0.$ (20 баллов)

Решение:

ОДЗ: $2x^2 + 7x + 3 \ge 0, \quad \Rightarrow \quad x \in (-\infty; -3] \cup [-0{,}5; +\infty)$.

Исходное неравенство эквивалентно следующему

$$\left(3x + 4 - 2\sqrt{2x^2 + 7x + 3}\right)\left(\left(x^2 - 4x + 2\right)^2 - (x - 2)^2\right) \le 0 \;\Leftrightarrow$$

$$\left(3x + 4 - 2\sqrt{2x^2 + 7x + 3}\right)\left(x^2 - 5x + 4\right)\left(x^2 - 3x\right) \le 0 \;\Leftrightarrow$$

$$\left(3x + 4 - 2\sqrt{2x^2 + 7x + 3}\right)(x - 1)(x - 4)x(x - 3) \le 0 .$$

Если $x \le -3$, то $3x + 4 < 0$, и $\left(3x + 4 - 2\sqrt{2x^2 + 7x + 3}\right) < 0$. Таким образом, приходим к неравенству $(x-1)(x-4)x(x-3) \ge 0$, и $x \in (-\infty; -3]$.

Если $x \ge -0{,}5$, то приходим к неравенству

$\left(\sqrt{2x+1} - \sqrt{x+3}\right)^2 (x-1)(x-4)x(x-3) \le 0$, и $x \in [0; 1] \cup \{2\} \cup [3; 4]$.

Окончательно имеем $x \in (-\infty; -3] \cup [0; 1] \cup \{2\} \cup [3; 4]$.

Ответ: $x \in (-\infty; -3] \cup [0; 1] \cup \{2\} \cup [3; 4]$.

5. Укажите все значения a, при которых система уравнений $3(x-a)^2 + y = 2 - a$, $y^2 + \left(\dfrac{x-2}{|x|-2}\right)^2 = 1$ имеет хотя бы одно решение, и решите ее при каждом a. (20 баллов)

Решение. Преобразуем второе уравнение: $y^2 = \dfrac{x^2 - 4|x| + 4 - x^2 + 4x - 4}{\left(|x|-2\right)^2}$; $y^2 = -\dfrac{4\left(|x| - x\right)}{\left(|x|-2\right)^2}$.

При $x < 0$ уравнение решений не имеет, так как правая часть меньше нуля; при $x \ge 0$ оно равносильно системе: $x \ge 0,\ x \ne 2,\ y = 0$. Подставляя $y = 0$ в первое уравнение, получаем; $3(x-a)^2 = 2 - a$, или $3x^2 - 6ax + 3a^2 + a - 2 = 0$ (*), у которого

$D/4 = 9a^2 - 9a^2 - 3a + 6 = 6 - 3a$.

Решения типового варианта заключительного тура (10 класс)

Корень $x=2$ квадратного уравнения может получиться, когда $3(2-a)^2=2-a$, т.е. если 1) $a=2$, уравнение имеет вид $(x-2)^2=0$, тогда этот корень единственный и заданная система решений не имеет, или 2) $3(2-a)=1$, т.е. $a=5/3$, тогда для x получаем уравнение $3(x-5/3)^2=2-5/3,\ x=5/3\pm 1/3$, у которого, кроме постороннего корня $x_1=2$, есть еще один корень $x_2=4/3$, удовлетворяющий условиям, и заданная система имеет единственное решение $(4/3;0)$.

Рассмотрим остальные случаи, когда решение системы будет единственным.

1. $\begin{cases} D/4=6-3a=0, \\ a>0, \quad a\neq 2. \end{cases}$ Система решений не имеет.

2. $3a^2+a-2<0$, т.е. при $-1<a<2/3$ $x=\left(3a+\sqrt{6-3a}\right)/3$.

3. $3a^2+a-2=0$, отсюда $a=2/3$, $3x^2-4x=0$, $x_1=0$, $x_2=4/3$ удовлетворяют условиям, или $a=-1$, $3x^2+6x=0$, $x_1=0,$ $x_2=-2$ –посторонний корень.

Рассмотрим случаи, когда система будет иметь два различных решения. Квадратное уравнение (*) будет иметь два различных неотрицательных корня $x_{1,2}=\left(3a\pm\sqrt{6-3a}\right)/3$, если

$\begin{cases} 6-3a>0, \\ a>0, \\ 3a^2+a-2\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0<a<2, \\ \left[\begin{array}{l} a\leq -1, \\ a\geq 2/3 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow 2/3\leq a<2$. Из этого промежутка надо убрать рассмотренную ранее точку $a=5/3$. Объединяя найденные значения a, получим ответ.

Ответ: $a\in[-1;2/3),\ x=\left(3a+\sqrt{6-3a}\right)/3,\ y=0$;

$a\in[2/3;5/3)\cup(5/3;2),\ x_{1,2}=\left(3a\pm\sqrt{6-3a}\right)/3,\ y=0$;

$a=5/3,\ x=4/3,\ y=0$.

6. Две окружности касаются друг друга и сторон треугольника ABC. Первая окружность радиуса $\frac{1}{18}$ касается сторон AB и AC в точках L и K, вторая окружность радиуса $\frac{2}{9}$ касается сторон AC и BC в точках N и M. Найдите площадь треугольника ABC, если $AL=\frac{1}{9},\ CM=\frac{1}{6}$. (20 баллов)

Решения типового варианта заключительного тура (10 класс)

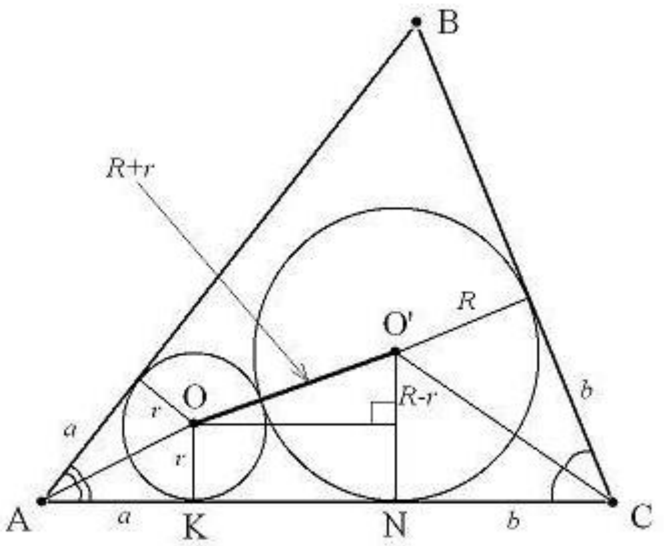


Рис. 1

Решение: $a=\frac{1}{9},\quad b=\frac{1}{6},\quad r=\frac{1}{18},\quad R=\frac{2}{9}$

$KN=2\sqrt{rR}=\frac{2}{9},\quad AC=a+KN+b=\frac{1}{2}$

$tg\,\frac{A}{2}=\frac{r}{a},\quad tg\,\frac{C}{2}=\frac{R}{b},$

$\cos^2\frac{A}{2}=\frac{a^2}{a^2+r^2},\quad \cos^2\frac{C}{2}=\frac{b^2}{b^2+R^2},$

$\cos A=2\cos^2\frac{A}{2}-1=\frac{2a^2}{a^2+r^2}-1=\frac{a^2-r^2}{a^2+r^2}=\frac{3}{5},$

$\cos C=2\cos^2\frac{C}{2}-1=\frac{2b^2}{b^2+R^2}-1=\frac{b^2-R^2}{b^2+R^2}=-\frac{7}{25},$

$\sin A=\frac{2ar}{a^2+r^2}=\frac{4}{5},$

$\sin C=\frac{2bR}{b^2+R^2}=\frac{24}{25},\qquad \sin B=\sin(A+C)=\sin A\cos C+\cos A\sin C=\frac{44}{125}.$

Теорема синусов: $\frac{AB}{\sin C}=\frac{AC}{\sin B}.$

$AB=\frac{AC\sin C}{\sin B},\quad S_{ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot AC\sin A=\frac{AC^2\sin A\sin C}{2\sin B}=\frac{4\cdot 24\cdot 125}{8\cdot 5\cdot 25\cdot 44}=\frac{3}{11}.$ **Ответ:** $\frac{3}{11}.$