Вариант № 8

1. Найдите натуральное число, которое имеет десять натуральных делителей (включая единицу и само число), два из которых простые, а сумма всех его натуральных делителей равна 186. (12 баллов)

2. Решите неравенство $\cos x-\sqrt{\sin y}-\sqrt{\sin y-\sin^2 x}\geq 1$. (12 баллов)

3. Найдите множество значений функции $y=f^{[2019]}(x)$, где $f(x)=\log_2\dfrac{\cos 2x+2\sin^2 x}{1-\sin 3x}$, $f^{[n]}(x)=\underbrace{f(f(f(\ldots(f}_{n\ раз}(x)\ldots)$ для любого натурального числа n. (16 баллов)

4. В треугольнике ABC проведена биссектриса AD, сторона AC равна $\sqrt{2}$. Описанная около треугольника ABD окружность проходит через центр окружности, вписанной в треугольник ACD. Найдите площадь треугольника ACD, если $R_1:R_2=\sqrt{3}$, где R_1, R_2 - радиусы окружностей, описанных около треугольников ABD и ACD соответственно. (20 баллов)

5. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$\sqrt[3]{6a\sin x+4a^2-6a}-\sqrt[3]{\cos 2x+8\sin x+9}=\cos 2x+(8-6a)\sin x-4a^2+6a+9$ имеет два различных решения на отрезке $\left[-\dfrac{\pi}{6};\dfrac{3\pi}{2}\right]$. Укажите эти решения для каждого найденного a.

(20 баллов)

6. Найдите площадь сечения правильной треугольной пирамиды $TABC$ плоскостью, проходящей через центр сферы описанной около пирамиды, и через середины бокового ребра TA и стороны основания BC и параллельной апофеме TF боковой грани ATB, если радиус сферы равен 3. (20 баллов)

Решение варианта №8

1. Найдите натуральное число, которое имеет десять натуральных делителей (включая единицу и само число), два из которых простые, а сумма всех его натуральных делителей равна 186.

Решение: Искомое натуральное число n представимо в виде $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2}$, $1 < p_1 < p_2$, p_1, p_2 - простые, причем $(\alpha_1+1)(\alpha_2+1) = 10$ (число всех делителей равно 10). Учитывая, что каждый из натуральных сомножителей в последнем равенстве не меньше 2, имеем два возможных случая: 1) $\alpha_1+1=2, \alpha_2+1=5$, или $\alpha_1=1, \alpha_2=4$, 2) $\alpha_1+1=5, \alpha_2+1=2$, или $\alpha_1=4, \alpha_2=1$.

1) $\alpha_1=1, \alpha_2=4$, $n = p_1 \cdot p_2^4$. Поскольку сумма всех делителей равна 186, то $(1+p_1)(1+p_2+p_2^2+p_2^3+p_2^4)=186$. Поскольку p_1, p_2 - простые числа, $1<p_1<p_2$, то $1+p_1 \ge 3$, $1+p_2+p_2^2+p_2^3+p_2^4 \ge 121$, то ни одно разложение числа 186 на произведение двух натуральных сомножителей не подходит .

2) $\alpha_1=4, \alpha_2=1$, $n = p_1^4 \cdot p_2$. Поскольку сумма всех делителей равна 186, то $(1+p_1+p_1^2+p_1^3+p_1^4)(1+p_2)=186$. Поскольку $1<p_1<p_2$, то $1+p_2 \ge 4$, $1+p_1+p_1^2+p_1^3+p_1^4 \ge 31$, то имеем $1+p_1+p_1^2+p_1^3+p_1^4=31, 1+p_2=6,$ или $p_1=2,\ p_2=5,\ n=2^4\cdot 5=80.$

Ответ: 80.

2. Решите неравенство $\cos x - \sqrt{\sin y} - \sqrt{\sin y - \sin^2 x} \ge 1.$

Решение:
Замена: $u=\cos x,\quad v=\sin y.$

$u-\sqrt{v} \ge \sqrt{u^2+v-1}+1 \quad \Leftrightarrow \qquad u-\sqrt{v}\ge 0,\quad u^2-2\sqrt{\ }\ u \ + \ v^2 \ \ge \sqrt{1v \quad} + 2u^2$ -

$$\begin{cases} u \ge \sqrt{v} \ge 0, \\ -u\sqrt{v} \ge \sqrt{u^2+v-1}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u\sqrt{v}=0, u\ge\sqrt{v}\ge 0, \\ u^2+v-1=0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=1, \\ v=0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos x = 1, \\ \sin y = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\pi n, n\in Z \\ y=\pi k, k\in Z. \end{cases}$$

Ответ: $(2\pi n, \pi k),\ n,k\in Z$.

3. Найдите множество значений функции $y=f^{[2019]}(x)$, где $f(x)=\log_2 \dfrac{\cos 2x+2\sin^2 x}{1-\sin 3x}$, $f^{[n]}(x)=\underbrace{f(f(f(\ldots(f}_{n\ раз}(x)\ldots)$ для любого натурального числа *n*.

Решение: Найдем сначала множество значений функции $y_1=f(x)$. Имеем $f(x)=\log_2 \dfrac{\cos 2x+2\sin^2 x}{1-\sin 3x}=\log_2\dfrac{1}{1-\sin 3x}$. Функция $t=\sin 3x$ принимает значения $t\in[-1;1]$.

Рассмотрим функцию $z=\dfrac{1}{1-t}$, определенную на полуинтервале $[-1;1)$. Графиком этой функции является гипербола с асимптотами $t=1$ и $z=0$. Функция $z=\dfrac{1}{1-t}$ на промежутке $[-1;1)$ неограниченно возрастает. Таким образом, минимальное значение z равно $\dfrac{1}{2}$, оно достигается в точке $t=-1$, и функция $z=\dfrac{1}{1-t}$ на промежутке $[-1;1)$ принимает все значения из промежутка $\left[\dfrac{1}{2};\infty\right)$. Функция $y_1=\log_2 z$ на промежутке $\left[\dfrac{1}{2};\infty\right)$ возрастает и принимает все значения из промежутка $\left[\log_2\dfrac{1}{2};\infty\right)=[-1;\infty)$. Функция $y_2=f(f(x))$ будет принимать те же значения, что и функция $y_2=f(y_1)$, если $y_1\in[-1;+\infty)$. Поскольку функция $t=\sin y_1$ при $y_1\in[-1;+\infty)$ принимает все значения из отрезка $[-1;1]$, то повторяя рассуждения, приведенные выше, получаем, что множеством значения функции $y_2=f(f(x))$ является промежуток $[-1;+\infty)$. И так далее, следовательно, множеством значений функции $y=f^{[2019]}(x)$ является промежуток $[-1;+\infty)$. **Ответ:** $E(y)=[-1;+\infty)$.

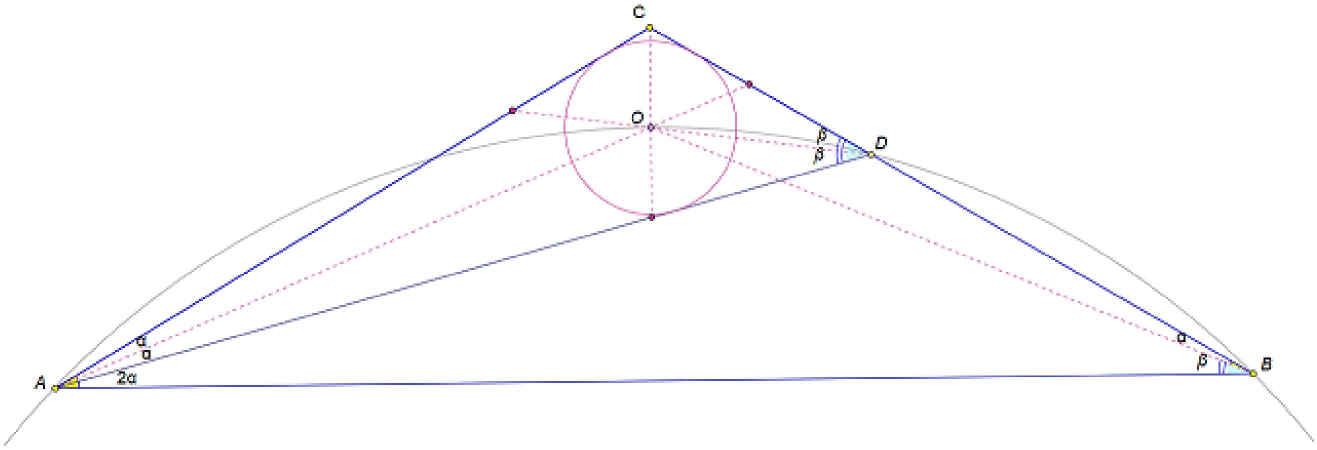
4. В треугольнике ABC проведена биссектриса AD, сторона AC равна $\sqrt{2}$. Описанная около треугольника ABD окружность проходит через центр окружности, вписанной в треугольник ACD. Найдите площадь треугольника ACD, если $R_1:R_2=\sqrt{3}$, где R_1, R_2 - радиусы окружностей, описанных около треугольников ABD и ACD соответственно.

Решение: Пусть O - центр описанной около треугольника ACD окружности, $\angle CAO=\alpha$, $\angle ABO=\beta$. Имеем $\angle CAO=\angle OAD=\alpha$, $\angle DAB=2\alpha$. По свойствам вписанных углов имеем $\angle DBO=\angle OAD=\alpha$, $\angle ABO=\angle ODA=\beta$, и $\angle ODA=\angle ODC=\beta$.

Для треугольника ACD имеем $2\alpha+2\beta+\angle C=180°$. Для треугольника ABC имеем $4\alpha+\beta+\alpha+\angle C=180°$. Получаем $\beta=3\alpha$, и $\angle BAC=\angle ABC=4\alpha$, $\angle ADC=6\alpha$. Треугольник ABC - равнобедренный, $AC=BC$.

Обозначим $\angle ABC=\varphi$ $(\varphi=4\alpha)$. Тогда $\angle ACB=180°-2\varphi$. Согласно теореме синусов, имеем $2R_1=\dfrac{AD}{\sin\varphi}$, $2R_2=\dfrac{AD}{\sin 2\varphi}$. Поскольку $R_1:R_2=\sqrt{3}$, то $\sin 2\varphi=\sqrt{3}\sin\varphi$, $\cos\varphi=\sqrt{3}/2$, $\varphi=30°$. Итак, $AC=\sqrt{2}$, $\angle ACB=120°$, $\angle ADC=45°$, $\angle CAD=15°$. По теореме синусов имеем $\dfrac{AC}{\sin 45°}=\dfrac{AD}{\sin 120°}$, $AD=\sqrt{3}$.

$S_{ACD}=\dfrac{1}{2}AC\cdot AD\sin 15°=\dfrac{\sqrt{6}}{2}\cdot\sqrt{\dfrac{1-\cos 30°}{2}}=\dfrac{\sqrt{6}}{4}\cdot\sqrt{2-\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{12-6\sqrt{3}}}{4}$. **Ответ**: $\dfrac{\sqrt{12-6\sqrt{3}}}{4}$.



5. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$\sqrt[3]{6a\sin x+4a^2-6a}-\sqrt[3]{\cos 2x+8\sin x+9}=\cos 2x+(8-6a)\sin x-4a^2+6a+9$ имеет два различных решения на отрезке $\left[-\frac{\pi}{6};\frac{3\pi}{2}\right]$. Укажите эти решения для каждого найденного a.

Решение: $\sqrt[3]{6a\sin x+4a^2-6a}-\sqrt[3]{\cos 2x+8\sin x+9}=\cos 2x+(8-6a)\sin x-4a^2+6a+9 \Leftrightarrow$

$\sqrt[3]{6a\sin x+4a^2-6a}+6a\sin x+4a^2-6a=\sqrt[3]{\cos 2x+8\sin x+9}+\cos 2x+8\sin x+9 \Leftrightarrow$

Рассмотрим функцию $f(t)=\sqrt[3]{t}+t$. Функция $f(t)$ возрастает на всей числовой оси.

Пусть $u=6a\sin x+4a^2-6a,\quad v=\cos 2x+8\sin x+9.$ Тогда имеем уравнение $f(u)=f(v),$ и в силу строгой монотонности функции f приходим к уравнению $u=v,$ т.е. $6a\sin x+4a^2-6a=\cos 2x+8\sin x+9.$ Последнее уравнение эквивалентно следующему $\sin^2 x+(3a-4)\sin x+2a^2-3a-5=0.$ Необходимо найти все значения параметра a, при которых это уравнение имеет два различных решения на отрезке $\left[-\frac{\pi}{6};\frac{3\pi}{2}\right]$. Сделаем замену: $y=\sin x$.

Приходим к уравнению $y^2+(3a-4)y+2a^2-3a-5=0.$ Для выполнения условия задачи нужно, чтобы один корень этого уравнения принадлежал промежутку $[-0,5;1)$, а второй, если такой имеется, не принадлежал отрезку $[-1;1]$, или это уравнение должно иметь два различных решения, принадлежащих множеству $[-1;-0,5)\cup\{1\}$. Дискриминант уравнения $D=(3a-4)^2-8a^2+12a+20=(a-6)^2$. Единственное решение будет при $a=6$, это решение $y=-7$. В остальных случаях имеем два различных решения $y_1=-2a+5$ и $y_2=-a-1$.

1) $-0,5\le -2a+5<1$, $-a-1<-1$ или $-a-1>1$ $\Rightarrow$ $a\in(2;2,75]$, $\sin x=-2a+5,$ $x_1=\arcsin(-2a+5),$ $x_2=\pi+\arcsin(2a-5).$

2) $-0,5\le -a-1<1$, $-2a+5<-1$ или $-2a+5>1$ $\Rightarrow$ $a\in(-2;-0,5]$, $\sin x=-a-1,$ $x_1=-\arcsin(a+1),$ $x_2=\pi+\arcsin(a+1).$

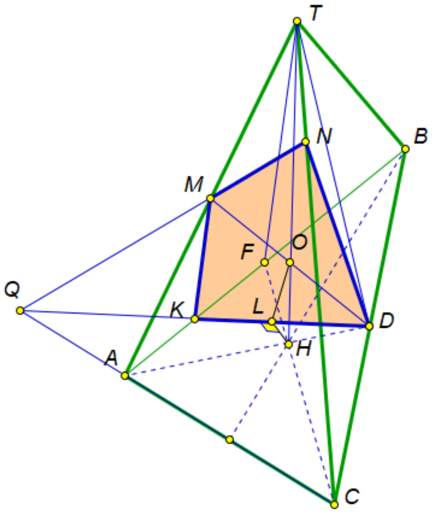
Два различных решения, принадлежащих множеству $[-1;-0,5)\cup\{1\}$, уравнение иметь не может.

Ответ: $a\in(2;2,75]$, $x_1=\arcsin(-2a+5),$ $x_2=\pi+\arcsin(2a-5).$

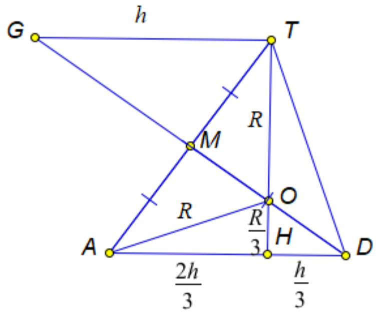
$a\in(-2;-0,5]$, $x_1=-\arcsin(a+1),$ $x_2=\pi+\arcsin(a+1).$

6. Найдите площадь сечения правильной треугольной пирамиды $TABC$ плоскостью, проходящей через центр сферы описанной около пирамиды, и через середины бокового ребра TA и стороны основания BC и параллельной апофеме TF боковой грани ATB, если радиус сферы равен 3.

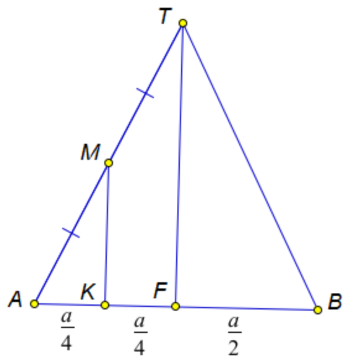
Решение: Центр сферы O лежит на перпендикуляре к плоскости основания, проведенном через центр основания H; M - середина TA, D - середина BC. Точки M, O, D принадлежат плоскости ATD и лежат на одной прямой. Высота $AD = h$ основания ABC точкой H делится в отношении 2:1, считая от вершины A, причем $AD = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. Пусть R - радиус описанной около пирамиды сферы.



Проведем в плоскости ATD прямую $TG \parallel AD$, причем G принадлежит прямой MD. Треугольники GTM и DAM равны, $GT = AD = h$, треугольники GTO и DHO подобны, и $\dfrac{TO}{OH} = \dfrac{3}{1}, TO = R, OH = \dfrac{R}{3}.$ По теореме Пифагора для треугольника AOH имеем $R^2 = R^2/9 + a^2/3,$ $a^2 = 8R^2/3,$ $R = 3, a = 2\sqrt{6}.$



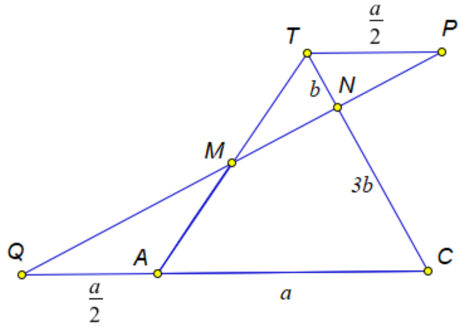
Поскольку плоскость сечения параллельной апофеме TF боковой грани ATB, то через точку M проведем прямую $MK \parallel TF, K \in AB,$ $AK = KF = a/4.$

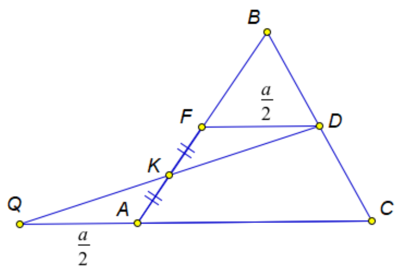


Прямая DK принадлежит плоскости сечения. Точка Q - точка пересечения прямых DK и AC. Треугольники QAK и DFK равны, $FD = QA = a/2$.

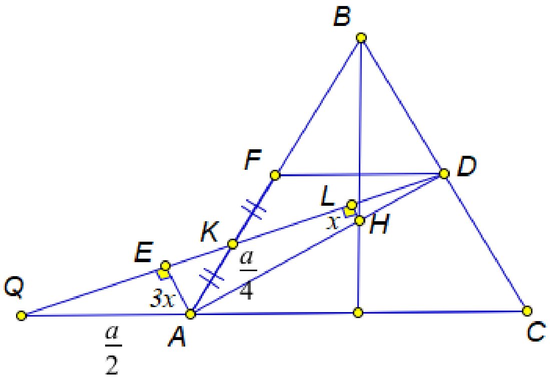
В плоскости боковой грани ATC проведем прямую $TP \parallel AC,$ причем P принадлежит прямой QM. Треугольники QMA и PMT равны, $TP = QA = a/2$. Пусть прямая QM пересекает ребро TC в точке N.

Треугольники TPN и CQN подобны, и $\dfrac{TN}{NC} = \dfrac{1}{3}.$





Найдем угол наклона плоскости сечения к плоскости основания. Эти плоскости пересекаются по прямой QD. Из точек H и A проведем перпендикуляры HL и AE к прямой QD. $\dfrac{HD}{AD}=\dfrac{HL}{AE}=\dfrac{1}{3}$. Обозначим $HL=x$. Тогда $AE=3x$.

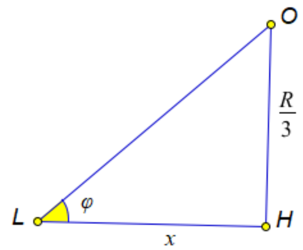


Рассмотрим треугольник QKA. Имеем $QA=a/2,\ AK=a/4,\ \angle QAK=120°$. По теореме косинусов получаем $QK^2=\dfrac{a^2}{4}+\dfrac{a^2}{16}+\dfrac{a^2}{8}=\dfrac{7a^2}{16}$, $QK=\dfrac{a\sqrt{7}}{4}$. Вычисляя площадь треугольника QKA, имеем $S_{QKA}=\dfrac{1}{2}QK\cdot 3x$, $S_{QKA}=\dfrac{1}{2}QA\cdot AK\sin 60°$, $QK\cdot 3x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}QA\cdot AK$, $\dfrac{3\sqrt{7}}{4}x=\dfrac{a\sqrt{3}}{16}$, $x=\dfrac{a}{4\sqrt{21}}$.

Пусть φ - угол между плоскостью сечения и плоскостью основания.

Тогда из треугольника OHL имеем $\operatorname{tg}\varphi=\dfrac{OH}{HL}=\dfrac{R}{3x}=\dfrac{4R\sqrt{21}}{3a}=\sqrt{14}$,

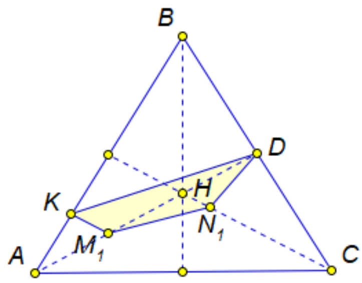
$\cos\varphi=\dfrac{1}{\sqrt{15}}$.



Найдем площадь проекции сечения на плоскость основания.

$S_{пр}=S_{ABC}-S_{KBD}-S_{AKM_1}-S_{DCN_1}-S_{AM_1N_1C}=$

$=S_{ABC}\left(1-\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{3}-\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{7}{8}\right)=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{24}$.



$S_{сеч}=\dfrac{S_{пр}}{\cos\varphi}=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{24\cos\varphi}=\dfrac{24\sqrt{5}}{8}=3\sqrt{5}.$

Ответ: $3\sqrt{5}$.