

## Вариант № 11

1. В состав автоматической линии по обработке корпусных деталей входило несколько одинаковых станков. Ежедневно линия обрабатывала 38880 деталей. После модернизации производства все станки линии заменили на более производительные, но тоже одинаковые, а их число увеличилось на 3. Автоматическая линия стала обрабатывать в день 44800 деталей. Сколько деталей в день обрабатывал каждый станок первоначально? (12 баллов)

2. Решите неравенство  $4 \sin x - \sqrt{\cos y} - \sqrt{\cos y - 16 \cos^2 x + 12} \geq 2$ . (12 баллов)

3. Найдите множество значений функции  $y = f^{[2019]}(x)$ , где  $f(x) = \log_4 \frac{\cos 2x - 2 \cos^2 x}{\cos x - 1}$ ,  
 $f^{[n]}(x) = \underbrace{f(f(f(\dots(f(x)\dots)))}_{n \text{ раз}}$  для любого натурального числа  $n$ . (16 баллов)

4. В равнобедренном треугольнике  $ABC$  с основанием  $AC$ , боковая сторона  $AB$  равна 2, отрезок  $AD$  является биссектрисой. Через точку  $D$  проведена касательная  $DH$  к окружности, описанной около треугольника  $ADB$ , точка  $H$  лежит на стороне  $AC$ . Найдите площадь треугольника  $ABC$ , если  $CD = \sqrt{2} CH$ . (20 баллов)

5. Найдите все значения параметра  $a$ , при которых уравнение

$$(\cos 2x + 14 \cos x - 14a)^7 - (6a \cos x - 4a^2 - 1)^7 = (6a - 14) \cos x + 2 \sin^2 x - 4a^2 + 14a - 2$$

имеет два различных решения на отрезке  $\left[-\frac{2\pi}{3}; \pi\right]$ . Укажите эти решения для каждого найденного  $a$ . (20 баллов)

6. Найдите площадь сечения правильной треугольной пирамиды  $TABC$  плоскостью, проходящей через центр сферы описанной около пирамиды, и через середину бокового ребра  $TA$  и параллельной медиане  $AD$  боковой грани  $ATC$ , если стороны основания равны 4, а центр сферы делит высоту пирамиды в отношении 3:1, считая от вершины. (20 баллов)

## Решение варианта №11

**1.** В состав автоматической линии по обработке корпусных деталей входило несколько одинаковых станков. Ежедневно линия обрабатывала 38880 деталей. После модернизации производства все станки линии заменили на более производительные, но тоже одинаковые, а их число увеличилось на 3. Автоматическая линия стала обрабатывать в день 44800 деталей. Сколько деталей в день обрабатывал каждый станок первоначально?

**Решение:** Пусть  $x$  – количество станков до модернизации,  $y$  – производительность каждого станка, т.е. количество деталей, обрабатываемых в день,  $z$  – производительность новых станков. Тогда имеем  $xy = 38880 = 2^5 \cdot 3^5 \cdot 5$ ,  $(x+3)z = 44800 = 2^8 \cdot 5^2 \cdot 7$ ,  $x > 1$ ,  $y < z$ ,  $x, y, z \in \mathbb{N}$ . Поскольку

$$y < z, \text{ то } \frac{38880}{x} < \frac{44800}{x+3}, \quad 38880(x+3) < 44800x, \quad x > \frac{38880 \cdot 3}{5920} = \frac{2^5 \cdot 3^6 \cdot 5}{2^5 \cdot 5 \cdot 37} = \frac{3^6}{37} = 19 \frac{26}{37}, \quad x \geq 20.$$

Поскольку  $(x+3)z = 2^8 \cdot 5^2 \cdot 7$ , то  $x$  не делится на 3, и  $x = 2^\alpha \cdot 5^\beta$ , где  $\alpha \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ ,  $\beta \in \{0, 1\}$ .

1)  $\beta = 0$ ,  $x = 2^\alpha$ ,  $\alpha \in \{5\}$ . При  $\alpha = 5$  имеем  $x = 32$ ,  $x+3 = 35$ ,  $y = 3^5 \cdot 5 = 1215$ ,  $z = 2^8 \cdot 5 = 1280$

2)  $\beta = 1$ ,  $x = 2^\alpha \cdot 5$ ,  $\alpha \in \{2, 3, 4, 5\}$ .

При  $\alpha = 2$  имеем  $x = 20$ ,  $x+3 = 23$ , чего быть не может.

При  $\alpha = 3$  имеем  $x = 40$ ,  $x+3 = 43$ , чего быть не может.

При  $\alpha = 4$  имеем  $x = 80$ ,  $x+3 = 83$ , чего быть не может.

При  $\alpha = 5$  имеем  $x = 160$ ,  $x+3 = 163$ , чего быть не может.

**Ответ:** 1215.

**2.** Решите неравенство  $4 \sin x - \sqrt{\cos y} - \sqrt{\cos y - 16 \cos^2 x + 12} \geq 2$ .

**Решение:**

Замена:  $u = 4 \sin x$ ,  $v = \cos y$ .

$$u - \sqrt{v} \geq \sqrt{u^2 + v - 4} + 2 \Leftrightarrow u - \sqrt{v} \geq 0, \quad u^2 - 2\sqrt{u} + v^2 \geq v \sqrt{u^2 + v - 4} \geq v$$

$$\begin{cases} u \geq \sqrt{v} \geq 0, \\ -u\sqrt{v} \geq 2\sqrt{u^2 + v - 4}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u\sqrt{v} = 0, u \geq \sqrt{v} \geq 0, \\ u^2 + v - 4 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 2, \\ v = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin x = 0, 5, \\ \cos y = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = (-1)^n \pi/6 + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ y = \pi/2 + \pi k, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

**Ответ:**  $((-1)^n \pi/6 + 2\pi n, \pi/2 + \pi k)$ ,  $n, k \in \mathbb{Z}$ .

**3.** Найдите множество значений функции  $y = f^{[2019]}(x)$ , где  $f(x) = \log_4 \frac{\cos 2x - 2 \cos^2 x}{\cos x - 1}$ ,

$f^{[n]}(x) = \underbrace{f(f(f(\dots(f(x)\dots)))}_{n \text{ раз}}$  для любого натурального числа  $n$ .

**Решение:** Найдем сначала множество значений функции  $y_1 = f(x)$ . Имеем

$$f(x) = \log_4 \frac{\cos 2x - 2 \cos^2 x}{\cos x - 1} = \log_4 \frac{1}{1 - \cos x}. \text{ Функция } t = \cos x \text{ принимает значения } t \in [-1; 1].$$

Рассмотрим функцию  $z = \frac{1}{1-t}$ , определенную на полуинтервале  $[-1; 1)$ . Графиком этой

функции является гипербола с асимптотами  $t = 1$  и  $z = 0$ . Функция  $z = \frac{1}{1-t}$  на промежутке

$[-1; 1)$  неограниченно возрастает. Таким образом, минимальное значение  $z$  равно  $\frac{1}{2}$ , оно

достигается в точке  $t = -1$ , и функция  $z = \frac{1}{1-t}$  на промежутке  $[-1; 1)$  принимает все значения из промежутка  $\left[\frac{1}{2}; \infty\right)$ . Функция  $y_1 = \log_4 z$  на промежутке  $\left[\frac{1}{2}; \infty\right)$  возрастает и принимает все значения из промежутка  $\left[\log_4 \frac{1}{2}; \infty\right) = [-0,5; \infty)$ . Функция  $y_2 = f(f(x))$  будет принимать те же значения, что и функция  $y_2 = f(y_1)$ , если  $y_1 \in [-0,5; +\infty)$ . Поскольку функция  $t = \sin y_1$  при  $y_1 \in [-0,5; +\infty)$  принимает все значения из отрезка  $[-1; 1]$ , то повторяя рассуждения, приведенные выше, получаем, что множеством значения функции  $y_2 = f(f(x))$  является промежуток  $[-0,5; +\infty)$ . И так далее, следовательно, множеством значений функции  $y = f^{[2019]}(x)$  является промежуток  $[-0,5; +\infty)$ . **Ответ:**  $E(y) = [-0,5; +\infty)$ .

4. В равнобедренном треугольнике  $ABC$  с основанием  $AC$ , боковая сторона  $AB$  равна 2, отрезок  $AD$  является биссектрисой. Через точку  $D$  проведена касательная  $DH$  к окружности, описанной около треугольника  $ADB$ , точка  $H$  лежит на стороне  $AC$ . Найдите площадь треугольника  $ABC$ , если  $CD = \sqrt{2} CH$ .

**Решение:** Пусть  $\angle CAD = \angle BAD = \alpha$ , тогда по свойствам касательной  $\angle CDP = \alpha$ . Треугольники  $CDH$  и  $ACD$  подобны по двум углам.

$$\text{Имеем } \frac{CH}{CD} = \frac{CD}{AC} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad CH = \frac{CD}{\sqrt{2}}, \quad AC = CD\sqrt{2}, \quad CH = \frac{AC}{2}.$$

Обозначим  $CH = AH = x$ ,  $DH = y$ . Угол  $\angle ADH = 180^\circ - 4\alpha$ .

Применим теорему синусов для треугольников  $ADH$  и  $HCD$ :

$$\frac{x}{\sin 4\alpha} = \frac{y}{\sin \alpha}, \quad \frac{x}{\sin \alpha} = \frac{y}{\sin 2\alpha}.$$

Приходим к уравнению

$$\sin^2 \alpha = \sin 2\alpha \sin 4\alpha, \quad 1 - \cos 2\alpha = 4 \sin^2 2\alpha \cos 2\alpha,$$

$$1 - \cos 2\alpha = 4(1 - \cos^2 2\alpha) \cos 2\alpha. \text{ Поскольку } 2\alpha < 90^\circ, \text{ то } \cos 2\alpha \neq 1.$$

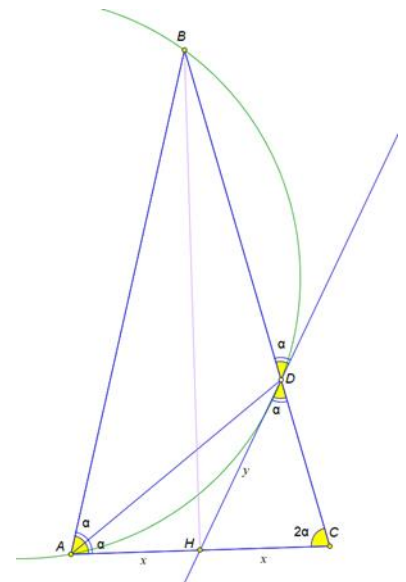
$$\text{Имеем } 4 \cos^2 2\alpha + 4 \cos 2\alpha - 1 = 0, \quad \cos 2\alpha = \frac{\sqrt{2} - 1}{2}.$$

Тогда получаем

$$AH = AB \cos 2\alpha = \sqrt{2} - 1, \quad BH = \sqrt{4 - (\sqrt{2} - 1)^2} = \sqrt{1 + 2\sqrt{2}},$$

$$S_{ABC} = AH \cdot BH = \sqrt{(1 + 2\sqrt{2})(3 - 2\sqrt{2})} = \sqrt{4\sqrt{2} - 5}.$$

**Ответ:**  $\sqrt{4\sqrt{2} - 5}$ .



5. Найдите все значения параметра  $a$ , при которых уравнение

$(\cos 2x + 14 \cos x - 14a)^7 - (6a \cos x - 4a^2 - 1)^7 = (6a - 14) \cos x + 2 \sin^2 x - 4a^2 + 14a - 2$  имеет два различных решения на отрезке  $\left[-\frac{2\pi}{3}; \pi\right]$ . Укажите эти решения для каждого найденного  $a$ .

**Решение:**  $(\cos 2x + 14 \cos x - 14a)^7 - (6a \cos x - 4a^2 - 1)^7 = (6a - 14) \cos x + 2 \sin^2 x - 4a^2 + 14a - 2$

$$\Leftrightarrow (\cos 2x + 14 \cos x - 14a)^7 + \cos 2x + 14 \cos x - 14a = (6a \cos x - 4a^2 - 1)^7 + 6a \cos x - 4a^2 - 1 \Leftrightarrow$$

Рассмотрим функцию  $f(t) = t^7 + t$ . Функция  $f(t)$  возрастает на всей числовой оси.

Пусть  $u = \cos 2x + 14 \cos x - 14a$ ,  $v = 6a \cos x - 4a^2 - 1$ . Тогда имеем уравнение  $f(u) = f(v)$ , и в силу строгой монотонности функции  $f$  приходим к уравнению  $u = v$ , т.е.

$\cos 2x + 14 \cos x - 14a = 6a \cos x - 4a^2 - 1$ . Последнее уравнение эквивалентно следующему  $\cos^2 x - (3a - 7) \cos x + 2a^2 - 7a = 0$ . Необходимо найти все значения параметра  $a$ , при которых это

уравнение имеет два различных решения на отрезке  $\left[-\frac{2\pi}{3}; \pi\right]$ . Сделаем замену:  $y = \cos x$ .

Приходим к уравнению  $y^2 - (3a - 7)y + 2a^2 - 7a = 0$ . Для выполнения условия задачи нужно, чтобы один корень этого уравнения принадлежал промежутку  $[-0,5; 1)$ , а второй, если такой имеется, не принадлежал отрезку  $[-1; 1]$ , или это уравнение должно иметь два различных решения, принадлежащих множеству  $[-1; -0,5) \cup \{1\}$ . Дискриминант уравнения

$D = (3a - 7)^2 - 8a^2 + 28a = (a - 7)^2$ . Единственное решение будет при  $a = 7$ , это решение  $y = 7$ . В

остальных случаях имеем два различных решения  $y_1 = 2a - 7$  и  $y_2 = a$ .

1)  $-0,5 \leq 2a - 7 < 1$ ,  $a < -1$  или  $a > 1 \Rightarrow a \in [3, 25; 4)$ ,  $\cos x = 2a - 7$ ,  $x_1 = \arccos(2a - 7)$ ,  $x_2 = -\arccos(2a - 7)$ .

2)  $-0,5 \leq a < 1$ ,  $2a - 7 < -1$  или  $2a - 7 > 1 \Rightarrow a \in [-0,5; 1)$ ,  $\cos x = a$ ,  $x_1 = \arccos(a)$ ,  $x_2 = -\arccos(a)$ .

Два различных решения, принадлежащих множеству  $[-1; -0,5) \cup \{1\}$ , уравнение иметь не может.

**Ответ:**  $a \in [3, 25; 4)$ ,  $x_1 = \arccos(2a - 7)$ ,  $x_2 = -\arccos(2a - 7)$ ;

$$a \in [-0,5; 1), x_1 = \arccos(a), x_2 = -\arccos(a).$$

6 Найдите площадь сечения правильной треугольной пирамиды  $TABC$  плоскостью, проходящей через центр сферы описанной около пирамиды, и через середину бокового ребра  $TA$  и параллельной медиане  $AD$  боковой грани  $ATC$ , если стороны основания равны 4, а центр сферы делит высоту пирамиды в отношении 3:1, считая от вершины.

**Решение:** Центр сферы  $O$  лежит на перпендикуляре к плоскости основания, проведенном через центр основания  $H$ ;  $M$  - середина  $TA$ ,  $F$  - середина  $BC$ . Точки  $M, O, F$  принадлежат плоскости  $ATF$ . Докажем, что они лежат на одной прямой. Высота  $AF = h$  основания  $ABC$  точкой  $H$  делится в отношении 2:1, считая от вершины  $A$ , причем  $AF = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ ,  $AH = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ .

Проведем в плоскости  $ATF$  прямую  $TG \parallel AF$ , причем  $G$  принадлежит прямой  $MF$ . Треугольники  $GTM$  и  $FAM$  равны,  $GT = AF = h$ . Пусть точка  $O_1$  - точка пересечения  $GF$  и  $TH$ .

Треугольники  $GTO_1$  и  $FHO_1$  подобны, и  $\frac{TO_1}{O_1H} = \frac{3}{1}$ , и  $O_1 = O$ .

Пусть  $R$  - радиус описанной около пирамиды сферы.

$\frac{TO}{OH} = \frac{3}{1}$ ,  $TO = R$ ,  $OH = \frac{R}{3}$ . По теореме Пифагора для треугольника

$AOH$  имеем  $R^2 = R^2/9 + a^2/3$ ,  $a^2 = 8R^2/3$ ,  $a = 2\sqrt{6}$ ,  $R = \sqrt{6}$ .

Поскольку плоскость сечения параллельна медиане  $AD$  боковой грани  $ATC$ , то через точку  $M$  проведем прямую  $MN \parallel AD$ ,  $N \in TC$ ,  $TN = ND = TC/4$ .

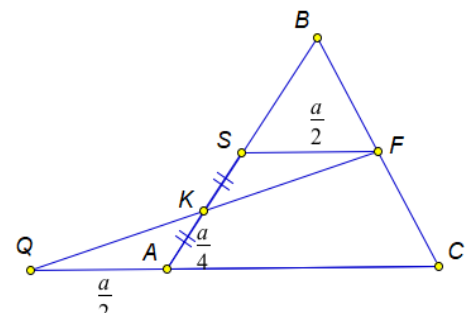
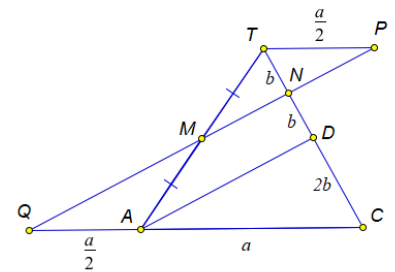
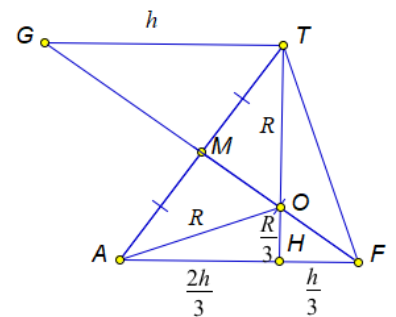
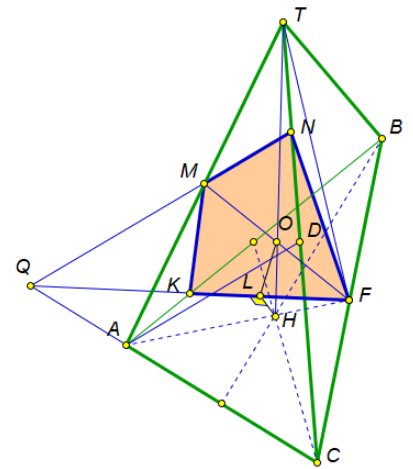
Прямая  $MN$  принадлежит плоскости сечения. Точка  $Q$  - точка пересечения прямых  $MN$  и  $AC$ . В плоскости боковой грани  $ATC$  проведем прямую  $TP \parallel AC$ , причем  $P$  принадлежит прямой  $MN$ .

Треугольники  $TPN$  и  $CQN$  подобны, и  $\frac{TP}{QC} = \frac{TN}{NC} = \frac{1}{3}$ ,

треугольники  $QMA$  и  $PMT$  равны,  $TP = QA = a/2$ .

В плоскости основания  $ABC$  соединим точки  $Q$  и  $F$ , точка  $K$  - точка пересечения прямых  $QD$  и  $AB$ . В треугольнике  $ABC$  проведем среднюю линию  $FS$ . Треугольники  $QAK$  и  $FSK$  равны,  $SK = KA = a/4$ .

Четырехугольник  $MNFK$  - искомое сечение.



Найдем угол наклона плоскости сечения к плоскости основания. Эти плоскости пересекаются по прямой  $QF$ . Из точек  $H$  и  $A$  проведем перпендикуляры  $HL$  и  $AE$  к прямой  $QF$ .

$$QF. \frac{HD}{AD} = \frac{HL}{AE} = \frac{1}{3}. \text{ Обозначим } HL = x. \text{ Тогда } AE = 3x.$$

Рассмотрим треугольник  $QKA$ . Имеем

$$QA = a/2, AK = a/4, \angle QAK = 120^\circ. \text{ По теореме косинусов}$$

получаем  $QK^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{16} + \frac{a^2}{8} = \frac{7a^2}{16}, QK = \frac{a\sqrt{7}}{4}$ . Вычисляя площадь треугольника  $QKA$ , имеем

$$S_{QKA} = \frac{1}{2} QK \cdot 3x, S_{QKA} = \frac{1}{2} QA \cdot AK \sin 60^\circ, QK \cdot 3x = \frac{\sqrt{3}}{2} QA \cdot AK, \frac{3\sqrt{7}}{4} x = \frac{a\sqrt{3}}{16}, x = \frac{a}{4\sqrt{21}}.$$

Пусть  $\varphi$  - угол между плоскостью сечения и плоскостью основания.

$$\text{Тогда из треугольника } OHL \text{ имеем } \operatorname{tg} \varphi = \frac{OH}{HL} = \frac{R}{3x} = \frac{4R\sqrt{21}}{3a} = \sqrt{14},$$

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{15}}.$$

Найдем площадь проекции сечения на плоскость основания.

$$S_{np} = S_{ABC} - S_{KBF} - S_{AKM_1} - S_{DCN_1} - S_{AM_1N_1C} =$$

$$= S_{ABC} \left( 1 - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{7}{8} \right) = \frac{a^2\sqrt{3}}{24}.$$

$$S_{сеч} = \frac{S_{np}}{\cos \varphi} = \frac{a^2\sqrt{3}}{24 \cos \varphi} = \frac{16\sqrt{5}}{8} = 2\sqrt{5}.$$

**Ответ:**  $2\sqrt{5}$ .

