Вариант № 10-6

1. Найдите все целые решения системы уравнений $\begin{cases} x+y+z=3, \\ x^3+y^3+z^3=3. \end{cases}$ (12 баллов)

2. Решите неравенство $\sqrt{1-x^2}-\sqrt[4]{1-y^2}-\sqrt{\sqrt{1-y^2}-x^2}\geq 1$. (12 баллов)

3. Студент написал программу перекрашивания пикселя в один из 128 различных цветов. Эти цвета он занумеровал натуральными числами от 1 до 128, причем основные цвета получили следующие номера: белый цвет - номер 1, красный – 5, оранжевый – 13, желтый – 19, зеленый – 23, голубой – 53, синий – 55, фиолетовый – 83, черный – 128. Если исходный цвет пикселя имеет номер $n\leq 17$, то программа студента перекрашивает его в цвет с номером $3n-2$, а если исходный цвет пикселя имеет номер $n\geq 18$, то пиксель перекрашивается в цвет с номером $|129-2n|$. Изначально пиксель имел красный цвет. К нему студент последовательно применил свою программу 2019 раз. В какой цвет в результате окрасился пиксель? (16 баллов)

4. Найдите все пары натуральных чисел a и b, для которых из четырех утверждений

1) a^2+4a+3 делится на b; 2) $a^2+ab-6b^2-2a-16b-8=0$;

3) $a+2b+1$ делится на 4; 4) $a+6b+1$ - простое число

три истинны, а одно ложно. (20 баллов)

5. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$((1-x^2)^2+2a^2+a)^5-((3a-1)(1-x^2)+6)^5=2a+5+(1-3a)x^2-2a^2-(1-x^2)^2$$

имеет два различных решения на отрезке $\left[-\sqrt{6}/2;\sqrt{2}\right]$. Укажите эти решения для каждого найденного a. (20 баллов)

6. В треугольнике ABC с углом A, равным 60°, проведена биссектриса AD. Радиус описанной около треугольника ADC окружности с центром в точке O равен $2\sqrt{3}/3$. Найдите длину отрезка BM, где M - точка пересечения отрезков AD и BO, если $AB=1$. (20 баллов)

Вариант № 10-7

1. Найдите все целые решения системы уравнений $\begin{cases} x+y+z=4, \\ x^3+y^3+z^3=46. \end{cases}$ (12 баллов)

2. Решите неравенство $\sqrt{4-x^2}-\sqrt[4]{4-y^2}-\sqrt{\sqrt{4-y^2}-x^2}\geq 2$. (12 баллов)

3. Студент написал программу перекрашивания пикселя в один из 128 различных цветов. Эти цвета он занумеровал натуральными числами от 1 до 128, причем основные цвета получили следующие номера: белый цвет - номер 3, красный – 7, оранжевый – 19, желтый – 23, зеленый – 37, голубой – 55, синий – 83, фиолетовый – 91, черный – 128. Если исходный цвет пикселя имеет номер $n\leq 17$, то программа студента перекрашивает его в цвет с номером $3n-2$, а если исходный цвет пикселя имеет номер $n\geq 18$, то пиксель перекрашивается в цвет с номером $|129-2n|$. Изначально пиксель имел белый цвет. К нему студент последовательно применил свою программу 2019 раз. В какой цвет в результате окрасился пиксель? (16 баллов)

4. Найдите все пары натуральных чисел a и b, для которых из четырех утверждений

1) a^2+2a делится на b; 2) $a^2+ab-6b^2-4a-17b-5=0$;

3) $a+2b$ делится на 4; 4) $a+6b$ - простое число

три истинны, а одно ложно. (20 баллов)

5. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$((1-x^2)^2+2a^2-3a)^5-((3a-4)(1-x^2)+5)^5=6a+1+(4-3a)x^2-2a^2-(1-x^2)^2$$

имеет два различных решения на отрезке $\left[-\sqrt{6}/2;\sqrt{2}\right]$. Укажите эти решения для каждого найденного a. (20 баллов)

6. В треугольнике ABC с углом A, равным 60°, проведена биссектриса AD. Радиус описанной около треугольника ADC окружности с центром в точке O равен $4\sqrt{3}/3$. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ABD, если $AB=2$. (20 баллов)

Вариант № 10-8

1. Найдите все целые решения системы уравнений $\begin{cases} x+y+z=3, \\ x^3+y^3+z^3=15. \end{cases}$ (12 баллов)

2. Решите неравенство $\sqrt{9+x^2}-\sqrt[4]{4-y^2}-\sqrt{\sqrt{4-y^2}+x^2}\geq 3.$ (12 баллов)

3. Студент написал программу перекрашивания пикселя в один из 128 различных цветов. Эти цвета он занумеровал натуральными числами от 1 до 128, причем основные цвета получили следующие номера: белый цвет - номер 1, красный – 7, оранжевый – 19, желтый – 23, зеленый – 37, голубой – 55, синий – 83, фиолетовый – 91, черный – 128. Если исходный цвет пикселя имеет номер $n\leq 19$, то программа студента перекрашивает его в цвет с номером $n+4$, а если исходный цвет пикселя имеет номер $n\geq 20$, то пиксель перекрашивается в цвет с номером $|129-2n|$. Изначально пиксель имел красный цвет. К нему студент последовательно применил свою программу 2019 раз. В какой цвет в результате окрасился пиксель? (16 баллов)

4. Найдите все пары натуральных чисел a и b, для которых из четырех утверждений
1) a^2-2a делится на b; 2) $a^2+ab-6b^2-8a-19b+7=0$;
3) $a+2b-2$ делится на 4; 4) $a+6b-2$ - простое число
три истинны, а одно ложно. (20 баллов)

5. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$((1-x^2)^2+2a^2-15a)^7-((3a-13)(1-x^2)-22)^7=18a-35+(13-3a)x^2-2a^2-(1-x^2)^2$$

имеет два различных решения на отрезке $\left[-\sqrt{6}/2;\sqrt{2}\right]$. Укажите эти решения для каждого найденного a. (20 баллов)

6. В треугольнике ABC с углом A, равным 60°, проведена биссектриса AD. Радиус описанной около треугольника ADC окружности с центром в точке O равен $\sqrt{3}/3$. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ABO, если $AB=0,5$.
(20 баллов)

Вариант № 10-9

1. Найдите все целые решения системы уравнений $\begin{cases} x+y+z=2, \\ x^3+y^3+z^3=-10. \end{cases}$ (12 баллов)

2. Решите неравенство $\sqrt{4-x^2}-\sqrt[4]{9-y^2}-\sqrt{\sqrt{9-y^2}-x^2}\geq 2.$ (12 баллов)

3. Студент написал программу перекрашивания пикселя в один из 128 различных цветов. Эти цвета он занумеровал натуральными числами от 1 до 128, причем основные цвета получили следующие номера: белый цвет - номер 1, красный – 5, оранжевый – 13, желтый – 21, зеленый – 45, голубой – 75, синий – 87, фиолетовый – 91, черный – 128. Если исходный цвет пикселя имеет номер $n\leq 19$, то программа студента перекрашивает его в цвет с номером $n+4$, а если исходный цвет пикселя имеет номер $n\geq 20$, то пиксель перекрашивается в цвет с номером $|129-2n|$. Изначально пиксель имел красный цвет. К нему студент последовательно применил свою программу 2019 раз. В какой цвет в результате окрасился пиксель? (16 баллов)

4. Найдите все пары натуральных чисел a и b, для которых из четырех утверждений
1) a^2+6a+8 делится на b; 2) $a^2+ab-6b^2-15b-9=0$;
3) $a+2b+2$ делится на 4; 4) $a+6b+2$ - простое число
три истинны, а одно ложно. (20 баллов)

5. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$((1-x^2)^2+2a^2+5a)^7-((3a+2)(1-x^2)+3)^7=5-2a-(3a+2)x^2-2a^2-(1-x^2)^2$$

имеет два различных решения на отрезке $\left[-\sqrt{6}/2;\sqrt{2}\right]$. Укажите эти решения для каждого найденного a. (20 баллов)

6. В треугольнике ABC с углом A, равным 60°, проведена биссектриса AD. Радиус описанной около треугольника ADC окружности с центром в точке O равен $\sqrt{3}$. Найдите длину отрезка OM, где M - точка пересечения отрезков AD и BO, если $AB=1,5$.
(20 баллов)