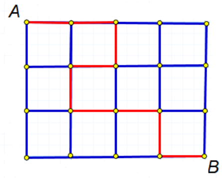
Вариант № 10-4



1. В детской игре шарик может двигаться по желобкам, которые являются ребрами квадратов со стороной 1 *дм*, и которые вместе составляют прямоугольную сеть размера 3 *дм* на 4 *дм* (см. рисунок). Какова длина кратчайшего пути шарика из точки А в точку В? Сколько существует различных путей этой минимальной длины? (12 баллов)

2. Монолитный блок типа А весит 17 кг, а монолитный блок типа В – 7 кг. Можно ли из этих блоков сформировать груз, равный максимальной грузоподъемности крана, которая составляет 317 кг. Если да, то какое наибольшее количество блоков при этом будет поднимать кран? (12 баллов)

3. Решите уравнение $\sqrt{(x+1)^2}+2\sqrt{x^2+4x+4}=|10+x|-|5-2x|$. (16 баллов)

4. Решите неравенство $x^2+2x+2x\sqrt{3-x^2}>3-6\sqrt{3-x^2}$ (20 баллов)

5. Найдите все значения параметра *a*, при которых уравнение

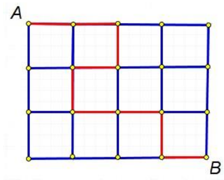
$$\frac{8+2a(x-2)}{|x|+x}=\sqrt{4-2a+ax}$$

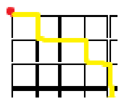
имеет хотя бы одно решение. Укажите эти решения для всякого найденного *a*. (20 баллов)

6. Окружность радиуса 2, вписанная в треугольник *ABC,* касается стороны *BC* в точке *D*. Окружность радиуса 4 касается продолжения сторон *AB* и *AC*, а также стороны *BC* в точке *E*. Найдите площадь треугольника *ADE,* если величина угла *ACB* равна $120°$. (20 баллов)

Вариант № 10-4

1. В детской игре шарик может двигаться по желобкам, которые являются ребрами квадратов со стороной 1 *дм,* и которые вместе составляют прямоугольную сеть размера 3 *дм* на 4 *дм* (см. рисунок). Какова длина кратчайшего пути шарика из точки А в точку В? Сколько существует различных путей этой минимальной длины? (12 баллов)





Решение. Кратчайший путь складывается из длины горизонтальных и вертикальных отрезков, т.е. 4+3=7. Т.е. минимальный путь состоит из 7 отрезков, а значит количество способов проложить минимальный маршрут равно количеству способов выбрать число вертикальных отрезков (а их 4) из эти 7, либо горизонтальных (а их 3), т.е. $C_7^3=\dfrac{7!}{4!3!}$ или $C_7^4=\dfrac{7!}{4!3!}$. **Ответ**: 35.

2. Монолитный блок типа А весит 17 кг, а монолитный блок типа В – 7 кг. Можно ли из этих блоков сформировать груз, равный максимальной грузоподъемности крана, которая составляет 317 кг. Если да, то какое наибольшее количество блоков при этом будет поднимать кран? 12 баллов)

Решение. Пусть за один раз поднимается x изделий А и y изделий В. Максимальное количество поднятых изделий будет тогда, когда суммарный вес составит 317 кг: $17x+7y=317$. Решим это уравнение в целых числах. Для начала решим уравнение $17x+7y=1$. Используем алгоритм Евклида: $17=7\cdot 2+3,\ \ 7=3\cdot 2+1,\ \ 3=1\cdot 3$, получаем разложение $1=7-3\cdot 2=7-(17-7\cdot 2)\cdot 2=7\cdot 5-17\cdot 2$, домножая на 317, приходим к представлению 317 в виде $(-2\cdot 317)\cdot 17+(5\cdot 317)\cdot 7=317$, значит решения уравнения в целых числах равны $x=-634+7k,\ \ y=1585-17k,\ \ k\in Z$. Учитывая, что решения могут быть только неотрицательные, получаем ограничения на *k:* $\dfrac{634}{7}\le k\le\dfrac{1585}{17},\Rightarrow k=91,\ 92,\ 93$. Значит, возможные пары (x, y): (3; 38), (10; 21) и (17; 4). Следовательно, максимальное возможное количество изделий – 3+38=41.

Ответ: 41.

3. Решите уравнение $\sqrt{(x+1)^2}+2\sqrt{x^2+4x+4}=|10+x|-|5-2x|$. (16 баллов)

Решение. Перепишем уравнение в виде $|x+1|+2|x+2|+|5-2x|=|10+x|$.

Заметим, что $x+1+2(x+2)+5-2x=10+x,$ значит уравнение равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x+1\ge 0,\\ 2(x+2)\ge 0,\\ 5-2x\ge 0,\end{cases} \Rightarrow\ -1\le x\le 2{,}5;\\ \begin{cases}x+1\le 0,\\ 2(x+2)\le 0,\\ 5-2x\le 0,\end{cases} \Rightarrow\ \text{нет решений}.\end{array}\right. \Rightarrow\ -1\le x\le 2{,}5.$$

Ответ: $[-1;\ 2{,}5]$.

4. Решите неравенство $\quad x^2+2x+2x\sqrt{3-x^2}>3-6\sqrt{3-x^2}$ (20 баллов)

Решение. Учтем ОДЗ, перенесем все в левую часть

$\begin{cases}-\sqrt{3}\le x\le\sqrt{3},\\ x^2+2x-3+2x\sqrt{3-x^2}+6\sqrt{3-x^2}>0,\end{cases}$ и разложим на множители

$$\Rightarrow\begin{cases}-\sqrt{3}\le x\le\sqrt{3},\\ (x-1)(x+3)+2\sqrt{3-x^2}\,(x+3)>0,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-\sqrt{3}\le x\le\sqrt{3},\\ (x+3)\left((x-1)+2\sqrt{3-x^2}\right)>0,\end{cases}$$ учитывая ОДЗ,

первая скобка положительна $\Rightarrow\begin{cases}-\sqrt{3}\le x\le\sqrt{3},\\ (x-1)+2\sqrt{3-x^2}>0,\end{cases}$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}1-x<0,\\ -\sqrt{3}\le x\le\sqrt{3},\end{cases}\\ \begin{cases}1-x\ge 0,\\ 4(3-x^2)>1-2x+x^2,\end{cases}\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}1<x\le\sqrt{3},\\ \begin{cases}x\le 1,\\ 5x^2-2x-11<0,\end{cases}\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}1<x\le\sqrt{3},\\ \begin{cases}x\le 1,\\ 5\left(x-\dfrac{1+2\sqrt{14}}{5}\right)\left(x-\dfrac{1-2\sqrt{14}}{5}\right)<0,\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}1<x\le\sqrt{3},\\ \begin{cases}x\le 1,\\ x>\dfrac{1-2\sqrt{14}}{5},\end{cases}\end{array}\right.\Rightarrow\frac{1-2\sqrt{14}}{5}<x\le\sqrt{3},\ \text{ или }\ x\in\left(\frac{1-2\sqrt{14}}{5};\ \sqrt{3}\right].$$

Ответ: $x\in\left(\dfrac{1-2\sqrt{14}}{5};\ \sqrt{3}\right]$.

5. Укажите, при каких значениях параметра *a* уравнение $\dfrac{8+2a(x-2)}{|x|+x}=\sqrt{4-2a+ax}$ имеет хотя бы одно решение. Найдите решения этого уравнения при всех найденных значениях параметра *a*. (20 баллов)

Решение. При $x\le 0$ решений нет. Рассмотрим $x>0$. Тогда уравнение перепишется в виде

$$\frac{4-2a+ax}{x}=\sqrt{4-2a+ax}\ \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{4-2a+ax}=0,\\ \dfrac{\sqrt{4-2a+ax}}{x}=1.\end{array}\right.$$

Решая первое уравнение, находим $x=\dfrac{2a-4}{a}>0\ \Rightarrow\ a\in(-\infty,\ 0)\bigcup(2,+\infty).$

Рассмотрим второе уравнение $\dfrac{\sqrt{4-2a+ax}}{x}=1\ \Rightarrow\ \sqrt{4-2a+ax}=x$, учитывая ограничения, получаем

$$4-2a+ax=x^2\ \Rightarrow\ x^2-ax+2a-4=0,\ D=a^2-8a+4=(a-4)^2\ \Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l}x_1=a-2>0\ \Rightarrow\ a>2,\\ x_2=2>0.\end{array}\right.$$

Окончательно получаем **ответ:**

$$\begin{array}{ll}a<0, & x=\dfrac{-4+2a}{a},\ x=2,\\ 0\le a\le 2, & x=2,\\ 2<a<4, & x=\dfrac{-2+4a}{a},\ x=2,\ x=-2+a,\\ a=2, & x=2,\ x=1/2,\\ a>2, & x=\dfrac{-4+2a}{a},\ x=2,\ x=-2+a.\end{array}$$

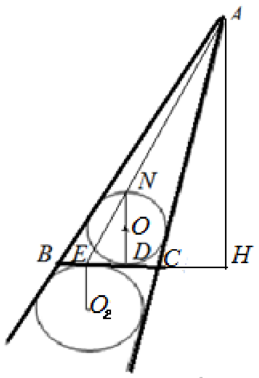
6. Окружность радиуса 2, вписанная в треугольник *ABC,* касается стороны *BC* в точке *D*. Окружность радиуса 4 касается продолжения сторон *AB* и *AC*, а также стороны *BC* в точке *E*. Найдите площадь треугольника *ADE,* если величина угла *ACB* равна 120 градусам . (20 баллов)

Решение. Центры окружностей лежат на биссектрисах углов. Поэтому

$$CD=r/\mathrm{tg}60^0=2/\sqrt{3},\quad CE=R/\mathrm{tg}30^0=4\sqrt{3},\ DE=4\sqrt{3}-2/\sqrt{3}=10/\sqrt{3}.$$

$\mathrm{tg}(DEN)=ND/ED=4/(10/\sqrt{3})=2\sqrt{3}/5,$ значит

$$\frac{AC}{\sin(DEN)}=\frac{EC}{\sin(60^0-DEN)}\ \Rightarrow\ AC=\frac{4\sqrt{3}\sin(DEN)}{\sqrt{3}/2\cos DEN-1/2\sin DEN}\Rightarrow$$



$$AC=\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{3}/2\cdot 5/(2\sqrt{3})-1/2}=\frac{16}{\sqrt{3}}.$$

$S=1/2\cdot ED\cdot AH$, где $AH\perp BC$ -высота в треугольниках ABC и AED,а также катет прямоугольного треугольника ACH с углом С равным 60 градусам, значит

$$AH\ =AC\sin 60=\frac{16}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=8\ \Rightarrow\ S=1/2\cdot 8\cdot 10/\sqrt{3}=40/\sqrt{3}$$

Ответ: $40/\sqrt{3}$